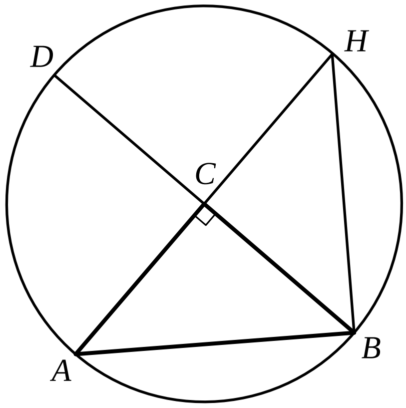
勾股定理證明-A061

【作輔助圖】

1. 以C為圓心，任意長$\overline{BD}$為直徑作圓。

2. 過C作直徑$\overline{AH} \perp \overline{BD}$。

3. 連接$\overline{AB}, \overline{BH}$。



【求證過程 1】

由兩個等腰直角三角形合成另一個等腰直角三角形，利用面積可推得勾股定理。

1. 先說明ΔABC、ΔABH均為等腰直角三角形以及邊長的關係。

   因為C是圓心，且直徑$\overline{AH} \perp \overline{BD}$，所以$\Delta ABC$、$\Delta ABH$均為等腰直角三角形，

   故

$$\overline{AC} = \overline{CH} \quad , \quad \overline{CA} = \overline{CB} \quad , \quad \overline{AB} = \overline{BH}$$

2. 再利用面積關係推得勾股定理。

   因為ΔABH面積 ＝ ΔABC面積 ＋ ΔCBH面積，所以

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{BH} &= \overline{AC} \times \overline{BC} + \overline{BC} \times \overline{CH} \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC} \times \overline{AC} \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【求證過程 2】

由等腰直角三角形 ABH 的面積的兩種作法，再利用直徑的轉換推出勾股定理。

1. 先說明 ΔABC 、 ΔABH 均為等腰直角三角形以及邊長的關係。

   因為 C 是圓心，且直徑 $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ ，所以 ΔABC 、 ΔABH 均為等腰直角三角形，

   故

$$\overline{AC} = \overline{CH}\ ,\ \overline{CA} = \overline{CB}\ ,\ \overline{AB} = \overline{BH}$$

2. 由等腰直角三角形 ABH 的面積，兩股乘積等於斜邊乘以高，進而推出勾股定理的關係式。

   因為 ΔABH 面積 $= \overline{BA} \times \overline{BH} \times \dfrac{1}{2} = \overline{AH} \times \overline{CB} \times \dfrac{1}{2}$ ，所以

$$\begin{aligned}
\overline{BA} \times \overline{BH} &= \overline{AH} \times \overline{BC} \\
&= \overline{BD} \times \overline{BC} \\
&= (\overline{BC} + \overline{CD}) \times \overline{BC} \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{CD} \times \overline{BC} \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{CA} \times \overline{CH} \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2
\end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下期刊與書籍

J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 2(2), 43.

Legendre A. M. (1858). *Elements of geometry and trigonometry* (pp. 119). New York: A. S. Barnes.

2.心得：此題證明 1 是利用等腰直角三角形面積間的關係推得勾股定理的關係式；證明 2 則是利用等腰三角形面積的兩種作法－兩股乘積等於斜邊乘以高，進而推得勾股定理的關係式，兩種方法都相當淺顯易懂。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學

●		●		

4.補充