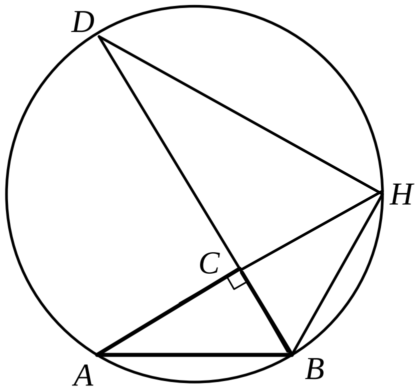
勾股定理證明-A060

【作輔助圖】

1. 在任意一圓中，作一弦$\overline{AH}$，及直徑$\overline{BD}$，使得$\overline{BD} \perp \overline{AH}$

2. 連接$\overline{AB}, \overline{BH}, \overline{HD}$ 。



【求證過程】

在圓內作任一直徑與任一弦垂直，再找出兩個相似形，利用對應邊成比例，推得勾股定理。

1. 先證明ΔABC與ΔDBH相似，而推得對應邊的比例關係。

因為$\overline{BD}$為直徑，且$\overline{BD} \perp \overline{AH}$，得到$\angle ACB = \angle DHB = 90°$，又因為

$\angle CAB = \angle HDB = \frac{1}{2} BH$，

所以

$$\Delta ABC \sim \Delta DBH \quad (\text{AA 相似})$$

進一步推得

$$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{BC} : \overline{BH} \text{，即} \overline{AB} \times \overline{BH} = \overline{DB} \times \overline{BC}.$$

2. 再由第 1.點推出的比例關係式，進一步推出勾股定理的關係式。

因為$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{BC} : \overline{BH}$，可推得

$$\begin{aligned}
\overline{AB} \times \overline{BH} &= \overline{DB} \times \overline{BC} \\
&= (\overline{DC} + \overline{BC}) \times \overline{BC} \\
&= \overline{DC} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2 \\
&= \overline{AC} \times \overline{CH} + \overline{BC}^2
\end{aligned}$$

又因為$\overline{BD}$為直徑，且$\overline{BD} \perp \overline{AH}$，得到$\overline{AB} = \overline{BH}, \overline{AC} = \overline{CH}$，

所以

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AB} \times \overline{BH} \\ &= \overline{AC} \times \overline{CH} + \overline{BC}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

PROOFS OF EUCLID'S 47TH PROPOSITION, BOOK I.--(II.).. (1887). Journal of Education, 26(2), 21.

Heath's Mathematical Monographs, 1900, No. 1, p. 26.

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *5*(3), 300.

2.心得：此題的輔助線作圖很簡捷，利用直徑與任一弦垂直，可以容易的看出對應角相等，進而得到相似三角形對應邊的比例關係。再利用圓內冪及弦心距的性質，最後推出勾股定理的關係式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4.補充