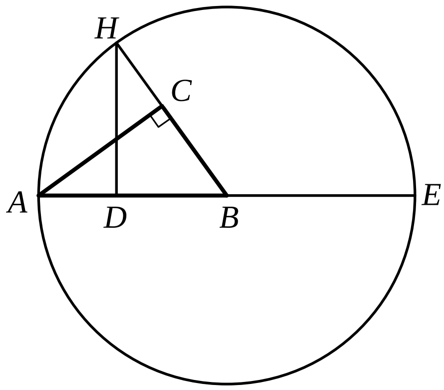
勾股定理證明-A059

【作輔助圖】

1. 以 B 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑作一圓 AEH

2. 過 H 作 $\overline{HD} \perp \overline{AE}$

3. 連接 $\overline{BH}$ ，並過 A 作 $\overline{AC} \perp \overline{BH}$ 。



【求證過程】

先說明兩個直角三角形全等，再利用直角三角形 AHE 比例中項的性質，推導出勾股定理。

1. 先證明 ΔABC 與 ΔHBD 全等，進而推得 $\overline{AC} = \overline{HD}, \overline{BC} = \overline{BD}$ 。

   因為 $\overline{AC} \perp \overline{BH}, \overline{HD} \perp \overline{AB}$ ，得到 $\angle ACB = \angle HDB = 90°$ 。又因為 $\angle HBD = \angle ABC$, $\overline{BH} = \overline{BA}$,

   所以

   $$\Delta ABC \cong \Delta HBD \quad \text{(AAS 全等)}$$

   進一步可得到

   $$\overline{AC} = \overline{HD}, \overline{BC} = \overline{BD}$$

2. 再藉由比例中項性質，推得勾股定理的關係式。

   因為 $\overline{HD} \perp \overline{AE}$ ，可得到 $\overline{HD}^2 = \overline{AD} \times \overline{DE}$ (比例中項性質)，

   所以

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{HD}^2 = \overline{AD}\times\overline{DE} \\ &= (\overline{AB}-\overline{BD})\times(\overline{BD}+\overline{BE}) \\ &= (\overline{AB}-\overline{BC})\times(\overline{BC}+\overline{AB}) \\ &= \overline{AB}^2-\overline{BC}^2\end{aligned}$$

所以

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：此證明出自以下書籍及期刊

(1) Department of Mathematics.. (1888). Journal of Education, 27(21), 327.

(2) Heath’s Mathematical Monographs, 1900, No. 2, p. 30, proof 26.

2.心得：此題作圖清晰，證明推理過程不難，淺顯易懂。利用全等三角形，以及比例中項的性質，即可推得勾股定理的關係式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		