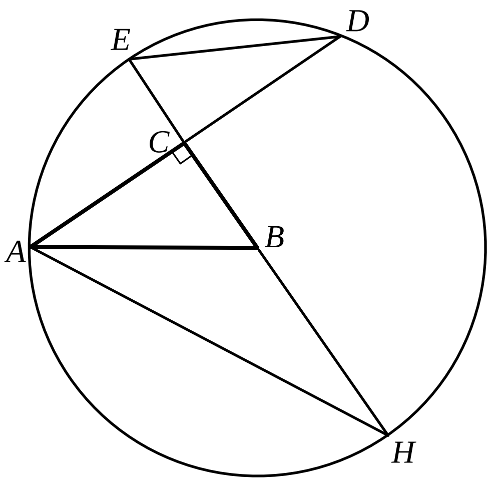
勾股定理證明-A058

【作輔助圖】

1. 以 B 為圓心，任意長 $\overline{EH}$ 為直徑作圓。

2. 在 $\overline{BE}$ 上取一點 C (異於 B,E)，並過 C 作 $\overline{BE}$ 之垂線且交圓弧於 A,D ，則 ΔABC 為直角三角形。



【求證過程 1】

由弦心距垂直平分此弦，再由圓內冪形質可推得勾股定理。

1. 先說明弦心距垂直平分此弦。

因為 $\overline{BC} \perp \overline{AD}$ 且 $\overline{BA} = \overline{BD} =$ 半徑，所以

$$\overline{AC} = \overline{CD}$$

2. 再利用圓內冪性質推出勾股定理的關係式。

因為 $\overline{AC} \times \overline{CD} = \overline{EC} \times \overline{CH}$ (圓內冪性質)，所以

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= (\overline{BE} - \overline{BC}) \times (\overline{BC} + \overline{BH}) \\ &= (\overline{BA} - \overline{BC}) \times (\overline{BC} + \overline{BA}) \\ &= \overline{BA}^2 - \overline{BC}^2\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【求證過程 2】

由兩個相似三角形，對應邊成比例導出關係式，再推出勾股定理。

1. 先證明ΔCED與ΔCAH 相似，可得到對應邊成比例的關係式$\overline{CA}\times\overline{CD}=\overline{CE}\times\overline{CH}$ 。

因為$\angle ACB=\angle ECD$(對頂角相等)，$\angle DEC=\angle CAH=\frac{1}{2}DH$ ，可推得

$$\Delta CED\sim\Delta CAH \text{ (AA 相似)}$$

所以

$$\overline{CE}:\overline{CA}=\overline{CD}:\overline{CH}\text{ ，即 }\overline{CA}\times\overline{CD}=\overline{CE}\times\overline{CH}.$$

2. 再說明弦心距垂直平分此弦。

因為$\overline{BC}\perp\overline{AD}$且$\overline{BA}=\overline{BD}=$ 半徑，所以

$$\overline{AC}=\overline{CD}$$

3. 由第 1.點$\overline{CA}\times\overline{CD}=\overline{CE}\times\overline{CH}$ ，及第 2.點$\overline{AC}=\overline{CD}$ ，可知

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= (\overline{BE}-\overline{BC})\times(\overline{BC}+\overline{BH})\\ &=(\overline{BA}-\overline{BC})\times(\overline{BC}+\overline{BA})\\ &=\overline{BA}^2-\overline{BC}^2\end{aligned}$$

所以

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1.來源：這個證明出自於以下期刊

PROOFS ON EUCLID'S 47TH PROPOSITION, BOOK I.--(I.).. (1887). Journal of education, 25(25), 404.

2.心得：兩種證明方式所使用的觀念都很直觀，因此都很適合用於國中教學提供給學生思考。證明 1 主要是利用圓內冪及弦心距的性質進而推導出勾股定理的關係式；證明 2 則是利用相似形概念推出圓內冪的關係式，再藉由弦心距的性質推出勾股定理的關係式。

3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		