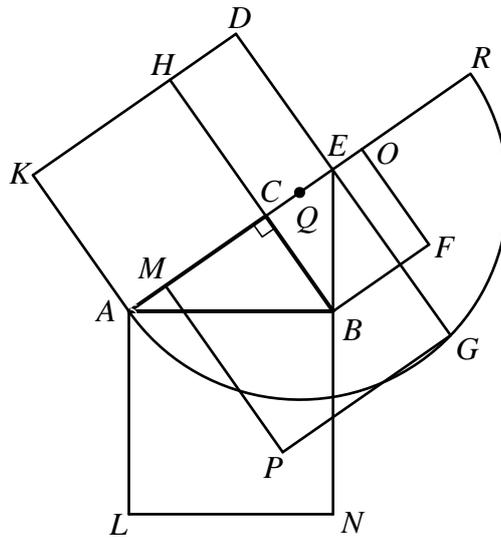


## 勾股定理證明-A057

### 【作輔助圖】

1. 以三邊為邊長向外各作一正方形，分別為  $ABNL$ ,  $BCOF$ ,  $ACHK$ 。
2. 延長  $\overline{NB}$  交  $\overline{AC}$  於  $E$  點，並作矩形  $CEDH$ 。
3. 在  $\overline{AC}$  上取  $\overline{ER} = \overline{ED}$ ，並以  $\overline{AR}$  為直徑，其中心點  $Q$  為圓心作半圓弧  $AGR$  與  $\overline{DE}$  交於  $G$  點。
4. 作正方形  $EGPM$ 。



### 【求證過程】

首先利用直角三角形  $ABE$  與  $AGR$  中的母子相似性質證明正方形  $EGPM$  的面積等於正方形  $ACHK$  與正方形  $BCOF$  的面積和。再證明正方形  $EGPM$  的面積等於正方形  $ABNL$  的面積。最後在藉由面積關係推出勾股定理的關係式。

1. 先證明正方形  $ACHK$ 、正方形  $BCOF$ 、正方形  $EGPM$  的面積關係。

因為矩形  $CEDH$  的面積 =  $\overline{CH} \times \overline{CE} = \overline{AC} \times \overline{CE} = \overline{BC}^2$  (母子相似性質) = 正方形  $BCOF$  的面積，且

矩形  $AEDK$  面積 =  $\overline{AE} \times \overline{ED} = \overline{AE} \times \overline{ER} = \overline{EG}^2$  (母子相似性質) = 正方形  $EGPM$  的面積  
所以

$$\begin{aligned}
\text{正方形}EGPM\text{面積} &= \overline{EG}^2 \\
&= \text{矩形}AEDK\text{面積} \\
&= \text{正方形}ACHK\text{面積} + \text{矩形}CEDH\text{面積} \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\
&= \text{正方形}ACHK\text{面積} + \text{正方形}BCOF\text{面積}
\end{aligned}$$

2. 再證明正方形  $EGPM$ ，與正方形  $ABNL$  的面積關係。

因為  $ACHK$  為正方形，且  $\overline{ER} = \overline{ED}$ ，所以

$$\begin{aligned}
\text{正方形}EGPM\text{面積} &= \overline{EG}^2 \\
&= \overline{AE} \times \overline{ER} (\text{母子相似性質}) \\
&= \overline{AE} \times \overline{ED} \\
&= \overline{AE} \times \overline{HC} \\
&= \overline{AE} \times \overline{AC} \\
&= \overline{AB}^2 (\text{母子相似性質}) \\
&= \text{正方形}ABNL\text{面積}
\end{aligned}$$

3. 最後利用面積關係推得勾股定理的關係式。

由 1. 和 2. 可知

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABNL\text{面積} &= \overline{AB}^2 = \overline{EG}^2 \\
&= \text{正方形}EGPM\text{面積} \\
&= \text{正方形}ACHK\text{面積} + \text{正方形}BCOF\text{面積}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

### 【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, 70, 359.

2. 心得：此證明的作圖方式是以直角三角形三邊長為邊向外做正方形，再由適當的作延長線與半圓，而作出另一個正方形  $EGPM$ 。透過面積的運算，及由母子相似性質可容易檢驗出各正方形的面積關係，而得到勾股定理的關係式。此證明的想法對於國中生而言不易察覺，但推導的過程卻是清晰可理解的。

### 3.評量

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	