勾股定理證明-Q004

【作輔助圖】

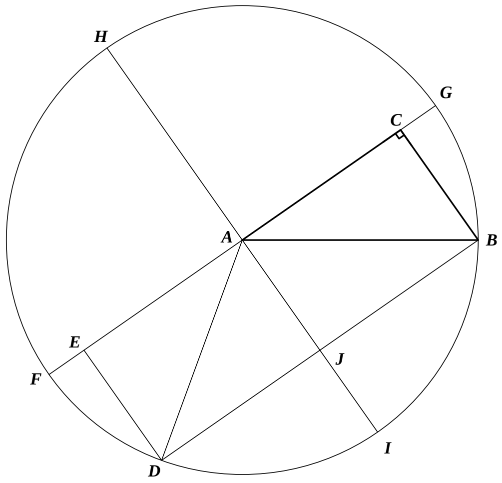
1. 以 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑，作一個圓。

2. 延長 $\overleftrightarrow{AC}$，分別交圓周於 F 、G，則 $\overline{FG}$ 為此圓之直徑。

3. 作另一條直徑 $\overline{HI}$，使得 $\overline{FG} \perp \overline{HI}$ 。

4. 在圓上取另一點 D，使得 $\angle DAI = \angle BAI$ ，並連接 $\overline{BD}$，使之交 $\overline{HI}$ 於 J 點。

5. 在 $\overline{AF}$ 上取一點 E ，使得 $\overline{AE} = \overline{DJ}$ 。



【求證過程】

根據方向向量的合成關係，以及在向量的內積與長度間作轉換，並由圓半徑的長度相等，整理式子推出勾股定理的關係式。

1. 從方向向量的合成關係：

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}.$$

2. 因為 $\overline{AE} = \overline{DJ} = \overline{BJ} = \overline{AC}$ ，$\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的方向相反，又 $\overline{BC} = \overline{DE}$ ，所以

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}.
\end{aligned}
$$

3. 同時對 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 取其長度的平方：

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right|^2, \\
\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right|^2.
\end{aligned}
$$

根據向量內積的代數定義，向量和自身的內積就是其長度的平方，因此上式可整理得：

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}\right) + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 &= \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 - 2\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}\right) + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2.
\end{aligned}
$$

4. 將第 3 點的兩式相加，整理可得：

$$
\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{CB}\right|^2.
$$

5. 又因為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AD}$ 是圓 A 的兩條半徑，其長度會相等，即

$$
\overline{AB} = \overline{AD}.
$$

6. 因此第 4 點的等式可以改寫為：

$$
\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2,
$$

即

$$2\left|\overline{AB}\right|^2 = 2\left|\overline{AC}\right|^2 + 2\left|\overline{CB}\right|^2.$$

7. 將第 6 點的等式同時除以 2，能推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

   根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1900 年 8 月想出來的。

2. 心得：

   此證明的輔助線給得稍多，卻不是每個點都會用到，甚至不必畫圓，直接給長方形 $BCED$，再用三角形全等性質證明也可以，整體畫面會更顯整潔。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●		