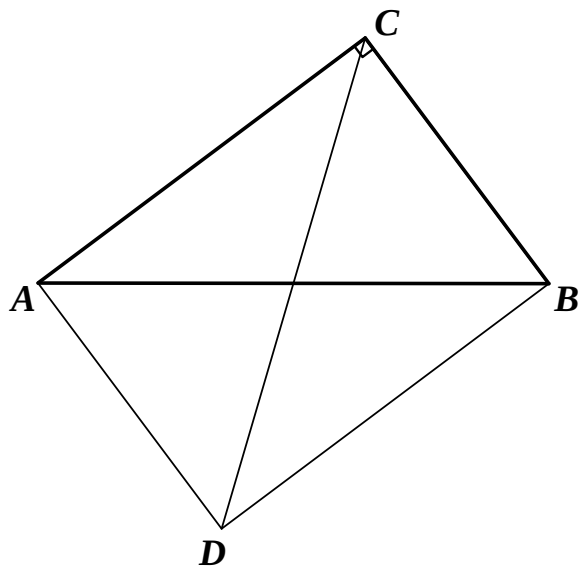
勾股定理證明-Q003

【作輔助圖】

1. 將直角三角形 ABC 視為長方形 $ADBC$ 的一半，而 D 點是長方形 $ADBC$ 的其中一個頂點。

2. 連接 $\overline{AD}$ 、$\overline{BD}$ 、$\overline{CD}$ 。



【求證過程】

根據方向向量的合成關係，以及在向量的內積與長度間作轉換，並由長方形兩條對角線等長之性質，整理式子推出勾股定理的關係式。

1. 從方向向量的合成關係：

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}.$$

2. 因為長方形 $ADBC$ 的兩組對邊會互相平行且相等，可得

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC},$$

所以

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}.$$

3. 同時對 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 取其長度的平方：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right|^2,$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right|^2.$$

根據向量內積的代數定義，向量和自身的內積就是其長度的平方，因此上式可整理得：

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}\\ &= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\right) + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 &= \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 - 2\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\right) + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2.\end{aligned}$$

4. 將第 3 點的兩式相加，整理可得：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

5. 又因為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 是長方形 $ADBC$ 的兩條對角線，其長度會相等，即

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

6. 因此第 4 點的等式可以改寫為：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2,$$

即

$$2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

7. 將第 6 點的等式同時除以 2，能推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

   Benjamin F. Yanney and James A. Calderhead (1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 6*(3), 71.

2. 心得：

   此證明與 Q002 又更加雷同，不一樣的地方在於導入長方形，相當於告訴解題者哪些向量的長度相等、方向相同，再搭配圖形解說，更容易讓學生接受此勾股定理之證明。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●		