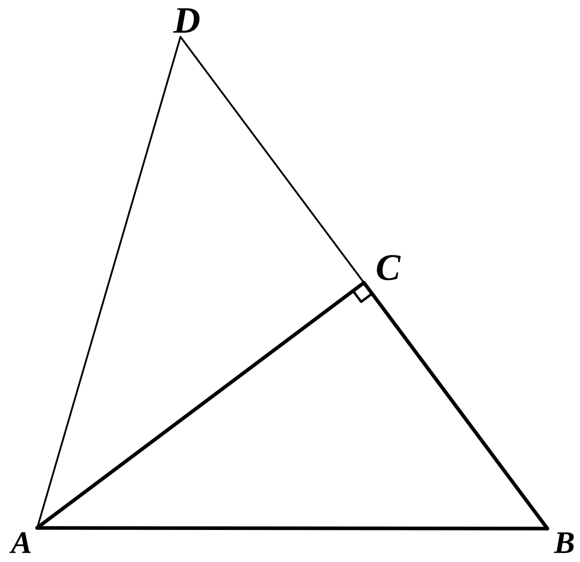
勾股定理證明-Q002

【作輔助圖】

1. 延長 $\overline{BC}$，並在 $\overline{BC}$ 上取一點 D，使得 $\overline{BC}=\overline{CD}$。

2. 連接 $\overline{AD}$。



【求證過程】

根據方向向量的合成關係，以及在向量的內積與長度間作轉換，並由線段的中垂線上任一點到兩端點等距之性質，整理式子推出勾股定理的關係式。

1. 從方向向量的合成關係：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}.$$

2. 因為 $\overline{BC}=\overline{CD}$，所以 $\left|\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$，可知 $\overrightarrow{CB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的長度相等，方向卻相反，得

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CB},$$

即

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}.$$

3. 同時對$\overline{AB}$和$\overline{AD}$取其長度的平方：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right|^2,$$
$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

根據向量內積的代數定義，向量和自身的內積就是其長度的平方，因此上式可整理得：

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}\\ &= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\right)+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 &= \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}\\ &= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\right)+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2.\end{aligned}$$

4. 將第 3 點的兩式相加，整理可得：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

5. 又因為$\overline{AC}$是$\overline{BD}$的垂直平分線，所以A到B、D兩端點的距離相等，即

$$\overline{AB}=\overline{AD}.$$

6. 因此第 4 點的等式可以改寫為：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2,$$

即

$$2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

7. 將第 6 點的等式同時除以 2，能推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

   Benjamin F. Yanney and James A. Calderhead (1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 6*(3), 71.

2. 心得：

   此證明與 Q001 類似，都是從藉由向量內積的展開與合併去推倒公式，但 Q002 使用到更多向量的平移與反向量性質，對學生的負荷程度又更高了，但難度仍然不高，還是很適合作為教學向量單元的例題與延伸使用。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●		