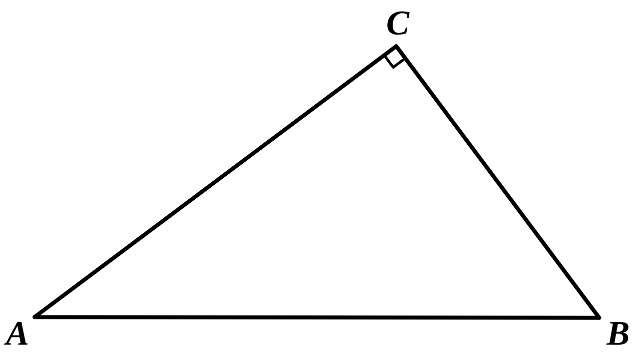
勾股定理證明-Q001

【作輔助圖】



【求證過程】

根據方向向量的合成關係，以及兩向量的夾角為直角時，其內積為 0 的性質，再利用向量長度的平方來推出勾股定理的關係式。

1. 從方向向量的合成關係：

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

2. 因為 $\angle C = 90°$，$\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 的內積為 0，乘上 2 倍得：

$$2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}) = 0.$$

3. 對第 1 點等式的左右兩邊，同時取其長度的平方：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right|^2,$$

根據向量內積的代數定義，向量和自身的內積就是其長度的平方，因此上式可整理得：

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}\right) + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

4. 將第 2 點代入等式中，推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

   Hardy A. S. (1881). *Elements of quaternions* (pp. 82). Boston, MA: Ginn, Heath, & co.

2. 心得：

   此證明完全沒有用到任何輔助線，單純只靠向量的代數關係和運算即可得證，非常適合引入高二下的空間向量單元。證明過程用到向量內積的展開與合併，能幫助學生加深向量概念的印象。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●		