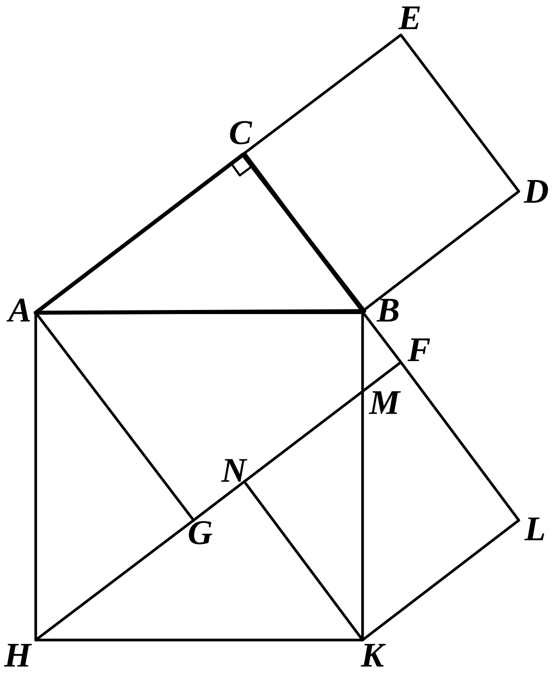
勾股定理證明-G101

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABKH$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。
2. 連接 $\overline{HG}$ (於證明過程第 1 點說明 $H-G-F$ 共線)。
3. 過 K 點作 $\overline{GF}$ 的平行線，與 $\overline{CF}$ 的延長線交於 L 點。
4. 過 K 點作 $\overline{GF}$ 的垂線，與 $\overline{GF}$ 交於 N 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的增補與移除關係後，可得到正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，再得到 $H-G-F$ 共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB},\ \overline{AG}=\overline{AC}$ ，且 $\angle GAH=90^{\circ}-\angle BAG=\angle CAB$ ，所以

$$\Delta AHG \cong \Delta ABC \text{(SAS 全等)}.$$

可得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^{\circ}$，又 $\angle FGA=90^{\circ}$，所以 $\angle HGA+\angle FGA=180^{\circ}$，故

$$H-G-F \text{ 共線。}$$

2. 證明三角形 HKN，三角形 BKL 皆與三角形 ABC 全等：

因為 $\overline{HK}=\overline{BK}$，$\angle HNK=\angle BLK=90^\circ$，且 $\angle HKN=90^\circ-\angle NKM=\angle BKL$，所以

$$\Delta HKN\cong\Delta BKL\,(\text{AAS 全等}).$$

同理，

$$\Delta BKL\cong\Delta ABC\,(\text{AAS 全等}).$$

故

$$\Delta HKN\cong\Delta BKL\cong\Delta ABC.$$

3. 證明四邊形 $NFLK$ 為正方形，且正方形 $NFLK$ 與正方形 $BCED$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $NFLK$ 的四個內角皆為直角，且 $\Delta HKN\cong\Delta BKL$，因此 $\overline{KN}=\overline{KL}$，故四邊形 $NFLK$ 為正方形。又因為 $\Delta BKL\cong\Delta ABC$，所以 $\overline{KL}=\overline{BC}$，

可得到

$$\text{正方形}NFLK\text{ 面積}=\text{正方形}BCED\text{ 面積}.$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\Delta AHG\text{面積}+\text{四邊形}ABMG\text{ 面積}+\Delta HKN\text{面積}+\Delta NMK\text{面積}\\&=\Delta ABC\text{面積}+\text{四邊形}ABMG\text{ 面積}+\Delta BKL\text{面積}+\Delta NMK\text{面積}\\&=\text{正方形}ACFG\text{ 面積}+\text{正方形}NFLK\text{ 面積}\\&=\text{正方形}ACFG\text{ 面積}+\text{正方形}BCED\text{ 面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.157). New York : Macmillan and co.

2. 心得：此題證明的難度不高，關鍵在於證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，三角形 HKN 與三角形 BKL 全等，以及正方形 $NFLK$ 與正方形 $BCED$ 的面積相等，再透過圖形的切割與平移，推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		