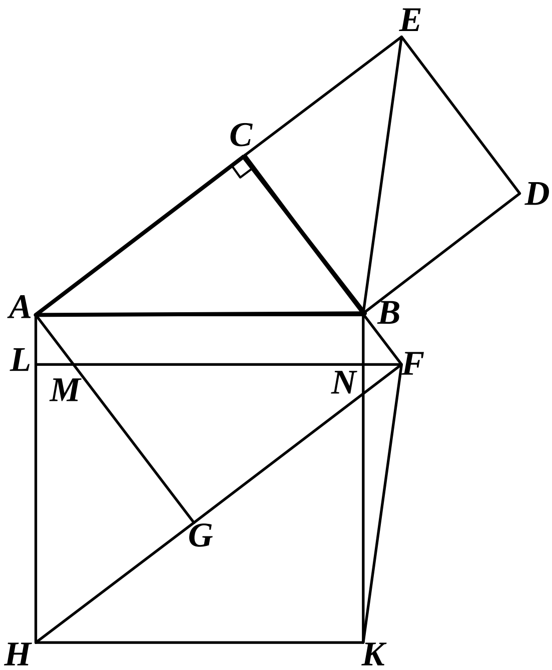
勾股定理證明-G100

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABKH$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。
2. 連接 $\overline{HG}$ (於證明過程第 1 點說明 $H-G-F$ 共線)。
3. 過 F 作 $\overline{FL}//\overline{AB}$ ，分別與 $\overline{AG}$, $\overline{BK}$ 交於 M 點, N 點。
4. 連接 $\overline{BE}$, $\overline{FK}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再將正方形 $ABKH$ 切割成兩個長方形，最後由底高的面積計算得到這兩個長方形的面積和會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，再得到 $H-G-F$ 共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$ ，且 $\angle GAH=90^\circ-\angle BAG=\angle CAB$ ，所以

$$\Delta AHG\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}).$$

可得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle FGA=90^\circ$，所以 $\angle HGA+\angle FGA=180^\circ$，故

$$H-G-F\text{ 共線。}$$

2. 證明四邊形 $ABNL$ 為長方形，四邊形 $ABFM$ 為平行四邊形，且長方形 $ABNL$ 與平行四邊形 $ABFM$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $ABNL$ 的四個內角皆為直角，因此四邊形 $ABNL$ 為長方形。又因為 $\overline{AB} // \overline{MF}$, $\overline{AM} // \overline{BF}$ ，所以四邊形 $ABFM$ 為平行四邊形，且

$$\begin{aligned}\text{長方形}ABNL\text{ 面積} &= \overline{AB} \times \overline{AL} \\ &= \overline{MF} \times \overline{BN} \\ &= \text{平行四邊形}ABFM\text{ 面積}.\end{aligned}$$

3. 證明四邊形 $LNKH$ 為長方形，且長方形 $LNKH$ 面積為三角形 HKF 面積的兩倍：

由作圖的平行關係可知四邊形 $LNKH$ 的四個內角皆為直角，因此四邊形 $LNKH$ 為長方形，且

$$\begin{aligned}\text{長方形}LNKH\text{面積} &= \overline{HK} \times \overline{HN} \\ &= 2 \times (\frac{1}{2} \times \overline{HK} \times \overline{HN}) \\ &= 2 \times \Delta HKF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

4. 證明三角形 HKF 與三角形 ABE 全等：

因為 $\Delta AHG \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{HG} = \overline{BC}$ ，因此

$\overline{HF} = \overline{HG} + \overline{GF} = \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{CE} + \overline{AC} = \overline{AE}$ ，且由作圖的平行關係可知

$\angle FHK = \angle EAB$ ，又 $\overline{HK} = \overline{AB}$ ，故

$$\Delta HKF \cong \Delta ABE\ (\text{SAS 全等}).$$

5. 證明三角形 ABC 與三角形 FMG 全等：

因為四邊形 $ABFM$ 為平行四邊形，所以 $\overline{AB} = \overline{MF}$ ，且由作圖的平行關係可知

$\angle CBA = \angle MAB = \angle GMF$ ，又 $\angle ACB = \angle FGM = 90^\circ$ ，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta FMG\ (\text{AAS 全等}).$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$面積＝長方形$LNKH$面積＋長方形$ABNL$面積

＝$2\times\Delta HKF$ 面積＋平行四邊形$ABFM$ 面積

＝$2\times\Delta ABE$ 面積＋平行四邊形$ABFM$ 面積

＝$2\times(\Delta ABC$ 面積＋ΔBCE面積$)$＋平行四邊形$ABFM$ 面積

＝$2\times\Delta ABC$ 面積$+2\times\Delta BCE$ 面積＋平行四邊形$ABFM$ 面積

＝$(\Delta ABC$ 面積＋ΔFMG 面積$)$＋正方形$BCED$面積

＋平行四邊形$ABFM$ 面積

＝$(\Delta ABC$ 面積＋ΔFMG 面積＋平行四邊形$ABFM$ 面積$)$

＋正方形$BCED$面積

＝正方形$ACFG$面積＋正方形$BCED$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 269.
2. 心得：此題證明作圖並不複雜，證明的關鍵在於證明三角形 HKF 與三角形 ABE 全等，以及三角形 ABC 與三角形 FMG 全等，進一步透過面積相等的圖形轉換，推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		