勾股定理證明-G099

【作輔助圖】

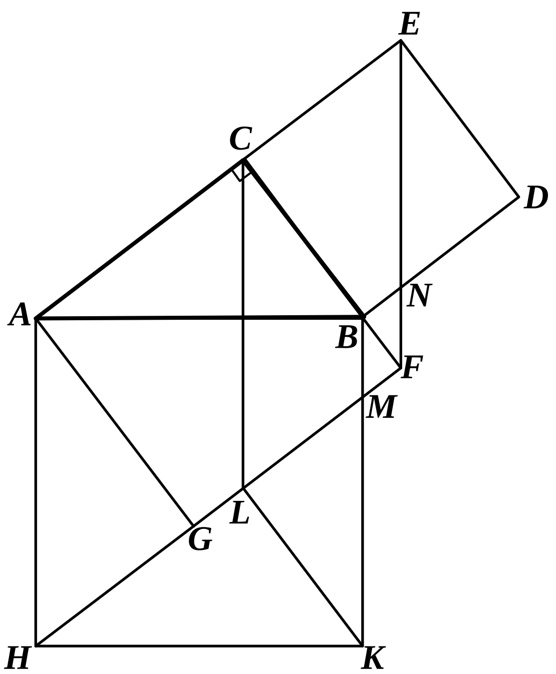
1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABKH$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。

2. 連接 $\overline{HG}$ (於證明過程第 1 點說明 $H-G-F$ 共線)。

3. 過 C 作 $\overline{CL} // \overline{AH}$ ，且與 $\overline{GF}$ 交於 L 點。

4. 連接 $\overline{EF}$ ，且與 $\overline{BD}$ 交於 N 點。

5. 連接 $\overline{KL}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的增補與移除關係後，可得到正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，再得到 $H-G-F$ 共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$ ，且 $\angle GAH = 90^\circ - \angle BAG = \angle CAB$ ，所以

$$\Delta AHG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

可得到 $\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又 $\angle FGA = 90^\circ$，所以 $\angle HGA + \angle FGA = 180^\circ$，故

$$H-G-F\text{ 共線。}$$

2. 先證明三角形 HKL 與三角形 ABC 全等，再得到 $\angle HLK=90^{\circ}$：

由作圖的平行關係可知 $\angle LHK=\angle CAB$，四邊形 $ACLH$ 為平行四邊形，因此 $\overline{HL}=\overline{AC}$,

又 $\overline{HK}=\overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HKL\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等).}$$

可得到

$$\angle HLK=90^{\circ}.$$

3. 證明三角形 CLF 與三角形 HKL 全等：

因為 $\overline{HL}=\overline{AC}=\overline{CF}$, $\overline{HK}=\overline{AH}=\overline{CL}$ ，且 $\angle HLK=\angle CFL=90^{\circ}$，所以

$$\Delta CLF\cong\Delta HKL\text{ (RHS 全等).}$$

4. 證明四邊形 $CEFL$ 與四邊形 $BNFM$ 皆為平行四邊形，並得到三角形 HKL 與三角形 FEC 面積相等，三角形 BNF 與三角形 BMF 面積相等：

因為 $\Delta CLF\cong\Delta HKL$，且 $\Delta HKL\cong\Delta ABC$ ，所以 $\Delta CLF\cong\Delta ABC$ ，可得到 $\overline{LF}=\overline{BC}=\overline{CE}$.

又 $\overline{CE}\,//\,\overline{LF}$ ，故四邊形 $CEFL$ 為平行四邊形，且 $\Delta FEC\text{面積}=\Delta CLF\text{面積}$ ，因此

$$\Delta HKL\text{面積}=\Delta FEC\text{面積}.$$

同理， $\overline{BN}\,//\,\overline{MF}$, $\overline{BM}\,//\,\overline{NF}$ ，故

四邊形 $BNFM$ 為平行四邊形，且 $\Delta BNF\text{面積}=\Delta BMF\text{面積}$.

5. 證明三角形 LKM 與三角形 DEN 全等：

因為 $\angle LMK=\angle BMF$ (對頂角相等), $\angle DNE=\angle BNF$ (對頂角相等)，且四邊形 $BNFM$ 為平行四邊形，故 $\angle LMK=\angle BMF=\angle BNF=\angle DNE$. 又因為 $\overline{LK}=\overline{BC}=\overline{DE}$,

$\angle KLM=\angle EDN=90^{\circ}$，所以

$$\Delta LKM\cong\Delta DEN\text{ (AAS 全等).}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$面積＝四邊形$ABMG$面積＋ΔAHG面積＋ΔHKL面積＋ΔLKM面積
＝四邊形$ABMG$面積＋ΔABC面積＋ΔFEC面積＋ΔDEN面積
＝四邊形$ABMG$面積＋ΔABC面積＋(四邊形$BCEN$面積＋ΔBNF面積)＋ΔDEN面積
＝四邊形$ABMG$面積＋ΔABC面積＋(四邊形$BCEN$面積＋ΔBMF面積)＋ΔDEN面積
＝(四邊形$ABMG$面積＋ΔABC面積＋ΔBMF面積)＋(四邊形$BCEN$面積＋ΔDEN面積)
＝正方形$ACFG$面積＋正方形$BCED$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 268.
2. 心得：此題證明的關鍵在於證明三角形HKL與三角形FEC面積相等，三角形BNF與三角形BMF面積相等，以及三角形LKM與三角形DEN全等，進一步透過圖形的切割與平移，推得正方形$ABKH$的面積會等於正方形$ACFG$與正方形$BCED$的面積和。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	