勾股定理證明-G098

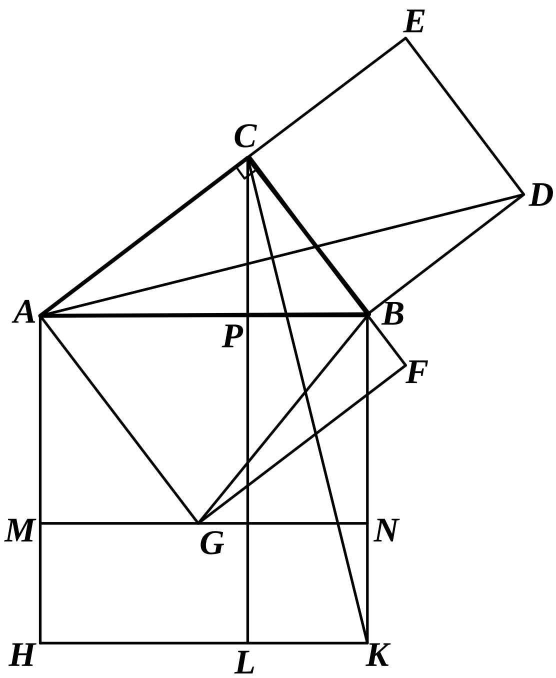
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$。

2. 過C作$\overline{CL} \perp \overline{HK}$於$L$，且與$\overline{AB}$相交於$P$點。

3. 過G作$\overline{MN} // \overline{HK}$，分別與$\overline{AH}$, $\overline{BK}$相交於M點, N點。

4. 連接$\overline{AD}$, $\overline{BG}$, $\overline{CK}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再將正方形$ABKH$切割成兩個長方形，最後由底高的面積計算得到這兩個長方形的面積和會等於正方形$ACFG$與正方形$BCED$的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形AMG與三角形APC全等，再得到$\overline{AM} = \overline{AP}$：

   由作圖的平行關係可知$\angle AMG = \angle APC = 90^\circ$，又因為$\overline{AG} = \overline{AC}$,

   $\angle MAG = 90^\circ - \angle BAG = \angle PAC$，所以

$$\Delta AMG \cong \Delta APC \text{ (AAS 全等)}.$$

可得到

$$\overline{AM}=\overline{AP}.$$

2. 證明四邊形 $MNKH$ 的面積與四邊形 $PBKL$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $MNKH$ 與四邊形 $PBKL$ 皆為長方形，又因為

$\overline{AM}=\overline{AP}$，所以 $\overline{MH}=\overline{AH}-\overline{AM}=\overline{AB}-\overline{AP}=\overline{BP}$，因此

$$\begin{aligned}\text{長方形}MNKH\text{ 面積}&=\overline{MH}\times\overline{HK}\\&=\overline{BP}\times\overline{BK}\\&=\text{長方形}PBKL\text{ 面積}.\end{aligned}$$

3. 證明三角形 KBC 與三角形 ABD 全等：

因為 $\overline{BK}=\overline{AB},\ \ \overline{BC}=\overline{BD}$, 且 $\angle KBC=90^\circ+\angle ABC=\angle ABD$，所以

$$\Delta KBC\cong\Delta ABD\,(\text{SAS 全等}).$$

4. 證明長方形 $MNKH$ 的面積與正方形 $BCED$ 的面積相等：

$$\begin{aligned}\text{長方形}MNKH\text{ 面積}&=\text{長方形}PBKL\text{ 面積}\\&=\overline{BK}\times\overline{BP}\\&=2\times\Delta KBC\text{面積}\\&=2\times\Delta ABD\text{面積}\\&=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BC})\\&=\overline{BD}\times\overline{BC}\\&=\text{正方形}BCED\text{ 面積}.\end{aligned}$$

5. 證明四邊形 $ABNM$ 的面積與正方形 $ACFG$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $ABNM$ 為長方形，且

$$\begin{aligned}\text{長方形}ABNM\text{ 面積}&=\overline{AB}\times\overline{AM}\\&=2\times\Delta ABG\text{面積}\\&=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{AC})\\&=\overline{AG}\times\overline{AC}\\&=\text{正方形}ACFG\text{ 面積}.\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\text{長方形}ABNM\text{ 面積}+\text{長方形}MNKH\text{ 面積}\\&=\text{正方形}ACFG\text{面積}+\text{正方形}BCED\text{面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 268.
2. 心得：此題證明的關鍵在於證明三角形 *AMG* 與三角形 *APC* 全等，四邊形 *MNKH* 的面積與四邊形 *PBKL* 的面積相等，以及三角形 *KBC* 與三角形 *ABD* 全等，進一步透過圖形的切割與面積相等的關係轉換，推得正方形 *ABKH* 的面積會等於正方形 *ACFG* 與正方形 *BCED* 的面積和。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		