勾股定理證明-G097

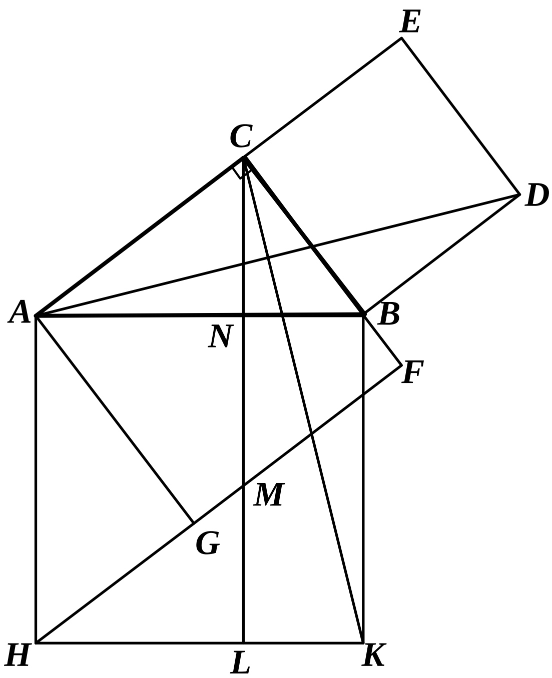
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABKH$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$。

2. 連接 $\overline{HG}$ (於證明過程第 1 點說明 $H-G-F$ 共線)。

3. 過 C 作 $\overline{CL}\perp\overline{HK}$ 於 L，且分別與 $\overline{AB}$, $\overline{GF}$ 相交於 N 點, M 點。

4. 連接 $\overline{AD}$, $\overline{CK}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再將正方形 $ABKH$ 切割成兩個長方形，最後由底高的面積計算得到這兩個長方形的面積和會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，再得到 $H-G-F$ 共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$，且 $\angle GAH=90^{\circ}-\angle BAG=\angle CAB$，所以

$$\Delta AHG\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}).$$

可得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^{\circ}$，又 $\angle FGA=90^{\circ}$，所以 $\angle HGA+\angle FGA=180^{\circ}$，故

$$H-G-F \text{ 共線。}$$

2. 證明三角形 KBC 與三角形 ABD 全等：

因為 $\overline{BK}=\overline{AB},\ \ \overline{BC}=\overline{BD}$，且 $\angle KBC=90^\circ+\angle ABC=\angle ABD$，所以

$$\Delta KBC\cong\Delta ABD\ (\text{SAS 全等}).$$

3. 證明四邊形 $AHLN$ 的面積與正方形 $ACFG$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $AHLN$ 為長方形，四邊形 $ACMH$ 為平行四邊形，因此

$$\begin{aligned}\text{長方形}AHLN\text{ 面積}&=\overline{AH}\times\overline{AN}\\&=\text{平行四邊形}ACMH\text{ 面積}\\&=\overline{AC}\times\overline{AG}\\&=\text{正方形}ACFG\text{ 面積}.\end{aligned}$$

4. 證明四邊形 $BKLN$ 的面積與正方形 $BCED$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $BKLN$ 為長方形，且

$$\begin{aligned}\text{長方形}BKLN\text{ 面積}&=\overline{BK}\times\overline{BN}\\&=2\times\Delta KBC\text{面積}\\&=2\times\Delta ABD\text{面積}\\&=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BC})\\&=\overline{BD}\times\overline{BC}\\&=\text{正方形}BCED\text{ 面積}.\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\text{長方形}AHLN\text{ 面積}+\text{長方形}BKLN\text{ 面積}\\&=\text{正方形}ACFG\text{面積}+\text{正方形}BCED\text{面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

(1) J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 11). Leipz.: Friese.

(2) Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 267.

(3) E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 70). Paris: Vuibert et Nony.

(4) Walter Lietzmann (1920). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Dr. Leitzmann, 30.

2. 心得：此題證明的圖形簡單易懂，將正方形 *ABKH* 切割為兩個長方形，再利用輔助線將兩個長方形面積分別轉移為平行四邊形與三角形面積的計算，進而推得正方形 *ABKH* 面積會等於正方形 *ACFG* 與正方形 *BCED* 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		