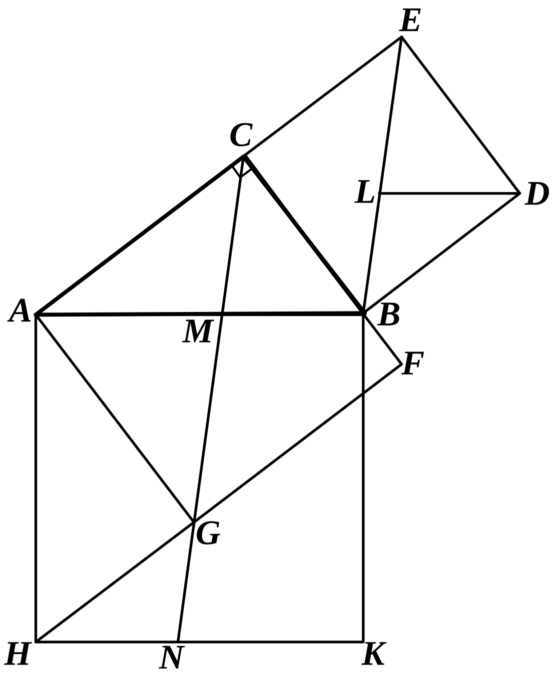
勾股定理證明-G096

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABKH$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。
2. 連接 $\overline{HG}$ (於證明過程第 1 點說明 $H-G-F$ 共線)。
3. 連接 $\overline{CG}$ ，並延長 $\overline{CG}$ ，與 $\overline{HK}$ 交於 N 點。
4. 過 D 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{EB}$ 交於 L 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向內向外作正方形，將正方形 $ABKH$ 切割成兩個梯形，再經過全等圖形的增補與移除關係後，可得到正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 AHG 與三角形 ABC 全等，再得到 $H-G-F$ 共線：

   因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$ ，且 $\angle GAH=90^{\circ}-\angle BAG=\angle CAB$ ，所以

   $$\Delta AHG\cong\Delta ABC\text{(SAS 全等)}.$$

   可得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^{\circ}$，又 $\angle FGA=90^{\circ}$，所以 $\angle HGA+\angle FGA=180^{\circ}$，故

   $$H-G-F\text{ 共線。}$$

2. 證明三角形 CMB 與三角形 ELD 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle CBM = \angle EDL$，又因為 $\angle MCB = \angle LED = 45^{\circ}$，且 $\overline{CB} = \overline{ED}$ ，所以

$$\Delta CMB \cong \Delta ELD \text{ (ASA 全等).}$$

3. 證明三角形 HGN 與三角形 DBL 全等：

因為 $\Delta AHG \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{HG} = \overline{BC} = \overline{DB}$ ，且由作圖的平行關係可知

$\angle GHN = \angle CAB = \angle LDB$ ，又 $\angle HGN = \angle DBL = 45^{\circ}$，因此

$$\Delta HGN \cong \Delta DBL \text{ (ASA 全等).}$$

4. 證明梯形 $AHNM$ 與梯形 $MBKN$ 的面積相等：

因為 $\Delta CMB \cong \Delta ELD$ ，所以 $\overline{MB} = \overline{LD}$ ，又因為 $\Delta HGN \cong \Delta DBL$ ，所以 $\overline{LD} = \overline{HN}$ ，故

$$\overline{MB} = \overline{LD} = \overline{HN}.$$

可得到

$$\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{MB} = \overline{HK} - \overline{HN} = \overline{NK} \text{ ，因此}$$

$$\begin{aligned}
\text{梯形}AHNM\text{ 面積} &= \frac{1}{2} \times (\overline{AM} + \overline{HN}) \times \overline{AH} \\
&= \frac{1}{2} \times (\overline{NK} + \overline{MB}) \times \overline{BK} \\
&= \text{梯形}MBKN\text{ 面積.}
\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{ 面積} &= \text{梯形}AHNM\text{ 面積} + \text{梯形}MBKN\text{ 面積} \\
&= 2 \times (\text{梯形}AHNM\text{ 面積}) \\
&= 2 \times (\Delta HGN\text{面積} + \Delta AHG\text{面積} + \Delta AMG\text{面積}) \\
&= 2 \times (\Delta DBL\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \Delta AMG\text{面積}) \\
&= 2 \times [\Delta DBL\text{面積} + (\Delta ACM\text{面積} + \Delta CMB\text{面積}) + \Delta AMG\text{面積}] \\
&= 2 \times (\Delta DBL\text{面積} + \Delta ACM\text{面積} + \Delta ELD\text{面積} + \Delta AMG\text{面積}) \\
&= 2 \times [(\Delta DBL\text{面積} + \Delta ELD\text{面積}) + (\Delta ACM\text{面積} + \Delta AMG\text{面積})] \\
&= 2 \times (\Delta BDE\text{面積} + \Delta ACG\text{面積}) \\
&= 2 \times \Delta BDE\text{面積} + 2 \times \Delta ACG\text{面積} \\
&= \text{正方形}BCED\text{ 面積} + \text{正方形}ACFG\text{ 面積.}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 268.

2. 心得：此題證明的作圖並不難，證明的關鍵在於證明三角形 CMB 與三角形 ELD 全等，三角形 HGN 與三角形 DBL 全等，以及梯形 $AHNM$ 與梯形 $MBKN$ 的面積相等，進一步透過圖形的切割與平移，推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		