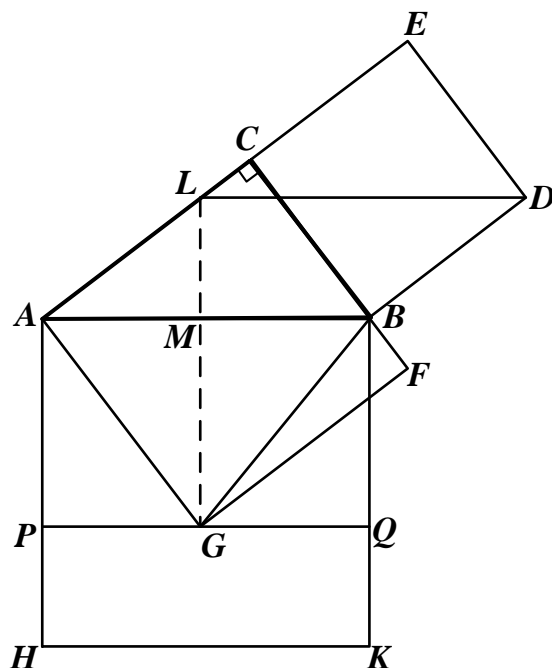


## 勾股定理證明-G095

### 【作輔助圖】

1. 以  $\overline{AB}$  為邊，向外作一正方形  $ABKH$ ，以  $\overline{BC}$  為邊，向外作一正方形  $BCED$ ，以  $\overline{AC}$  為邊，向內作一正方形  $ACFG$ 。
2. 過  $D$  作  $\overline{DL} \parallel \overline{AB}$ ，交  $\overline{AC}$  於  $L$ 。
3. 過  $G$  作  $\overline{PQ} \parallel \overline{HK}$ ，分別與  $\overline{AH}$ ， $\overline{BK}$  相交於  $P$  點， $Q$  點。
4. 連接  $\overline{LG}$ ，與  $\overline{AB}$  交於  $M$  點。
5. 連接  $\overline{BG}$ 。



### 【求證過程】

以直角三角形  $ABC$  的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再將正方形  $ABKH$  切割成兩個長方形，最後由底高的面積計算得到這兩個長方形的面積和會等於正方形  $ACFG$  與正方形  $BCED$  的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形  $ELD$  與三角形  $CAB$  全等，再得到  $\overline{EL} = \overline{CA}$ ：

由作圖的平行關係可知  $\overline{AL} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{LD} \parallel \overline{AB}$ ，故四邊形  $ALDB$  為平行四邊形，因此

$\overline{BD} = \overline{BC}$ ，又因為  $\overline{ED} = \overline{CB}$ ， $\angle E = \angle ACB = 90^\circ$ ，所以

$$\triangle ELD \cong \triangle CAB \text{ (RHS 全等).}$$

可得到

$$\overline{EL} = \overline{CA}.$$

2. 先證明三角形  $AGL$  與三角形  $CAB$  全等，再得到  $\angle AGL = \angle CAB$ ， $\overline{LG} = \overline{AH}$ ：

因為  $\overline{EL} = \overline{CA}$ ，所以  $\overline{AL} = \overline{CA} - \overline{LC} = \overline{EL} - \overline{LC} = \overline{EC} = \overline{CB}$ ，又  $\overline{AG} = \overline{AC}$ ，

$\angle GAL = \angle ACB = 90^\circ$ ，所以

$$\triangle AGL \cong \triangle CAB \text{ (SAS 全等).}$$

可得到

$$\angle AGL = \angle CAB, \overline{LG} = \overline{BA} = \overline{AH}.$$

3. 先證明  $\overline{LG} \parallel \overline{AH}$ ，再得到  $\overline{LM} = \overline{PH}$ ：

因為  $\angle CAB = 90^\circ - \angle GAB = \angle HAG$ ，又  $\angle AGL = \angle CAB$ ，所以  $\angle AGL = \angle HAG$ ，故

$$\overline{LG} \parallel \overline{AH} \text{ (內錯角相等).}$$

由作圖的平行關係可知四邊形  $APGM$  為長方形，因此  $\overline{AP} = \overline{MG}$ ，又因為  $\overline{LG} = \overline{AH}$ ，所以

$$\overline{LM} = \overline{LG} - \overline{MG} = \overline{AH} - \overline{AP} = \overline{PH}.$$

4. 證明四邊形  $PQKH$  的面積與正方形  $BCED$  的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形  $PQKH$  為長方形，四邊形  $LDBA$  為平行四邊形，因此

$$\begin{aligned} \text{長方形 } PQKH \text{ 面積} &= \overline{PQ} \times \overline{PH} \\ &= \overline{AB} \times \overline{LM} \\ &= \text{平行四邊形 } LDBA \text{ 面積} \\ &= \overline{BD} \times \overline{BC} \\ &= \text{正方形 } BCED \text{ 面積.} \end{aligned}$$

5. 證明四邊形  $ABQP$  的面積與正方形  $ACFG$  的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形  $ABQP$  為長方形，且

$$\begin{aligned} \text{長方形 } ABQP \text{ 面積} &= \overline{AB} \times \overline{AP} \\ &= 2 \times \triangle ABG \text{ 面積} \\ &= 2 \times \left( \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{AC} \right) \\ &= \overline{AG} \times \overline{AC} \\ &= \text{正方形 } ACFG \text{ 面積.} \end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABKH \text{ 面積} &= \text{長方形}ABQP \text{ 面積} + \text{長方形}PQKH \text{ 面積} \\ &= \text{正方形}ACFG \text{ 面積} + \text{正方形}BCED \text{ 面積}. \end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

### 【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). *New and Old Proofs of the Pythagorean. The American Mathematical Monthly*, 4(11), 268.

2. 心得：此題證明的關鍵在於證明三角形  $AGL$  與三角形  $CAB$  全等，進而推得

$\overline{LM} = \overline{PH}$ ，而證明概念是將正方形  $ABKH$  切割為兩個長方形，再利用輔助線將兩個長方形面積分別轉移為三角形與平行四邊形面積的計算，進而推得正方形  $ABKH$  面積會等於正方形  $ACFG$  與正方形  $BCED$  的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：原書上並沒有作出輔助線  $\overline{LG}$ ，但不連接  $\overline{LG}$  便無法證明三角形  $AGL$  與三角形  $CAB$  全等，進而得到  $\overline{LM} = \overline{PH}$ 。