勾股定理證明-G094

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABKH$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。

2. 過 D 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，分別與 $\overline{BC}$，$\overline{AC}$ 交於 S 點，L 點。

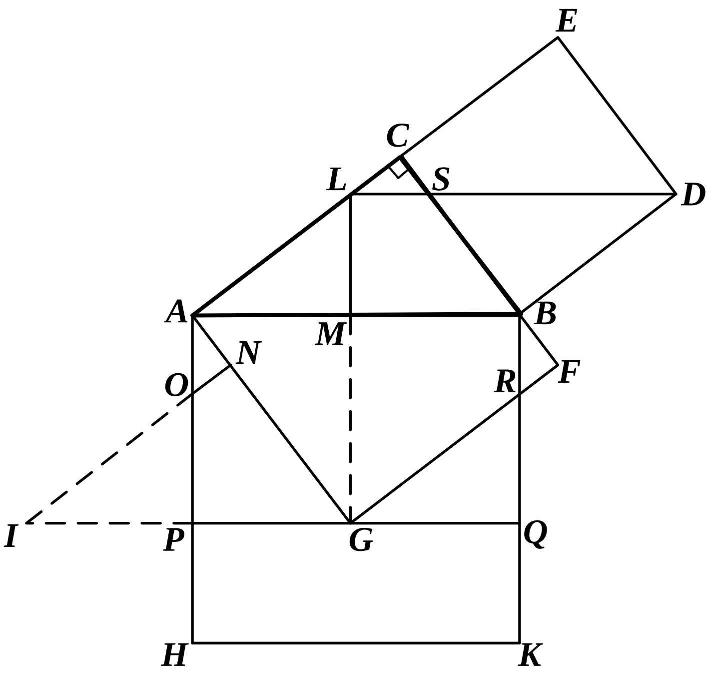
3. 過 G 點作 $\overline{HK}$ 的平行線，分別與 $\overline{AH}$，$\overline{BK}$ 交於 P 點，Q 點。

4. 過 L 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，與 $\overline{AB}$ 交於 M 點。

5. 在 $\overline{AG}$ 上取一點 N ，使得 $\overline{GN} = \overline{BC}$ ，且過 N 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，與 $\overline{AH}$ 交於 O 點。

6. 延長 $\overline{NO}$，$\overline{GP}$ ，使其相交於 I 點。

7. 連接 $\overline{LG}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的增補與移除關係後，可得到正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 AON 與三角形 BRF 全等：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AH} // \overline{BK}$, $\overline{AG} // \overline{CF}$ ，因此 $\angle OAN = \angle RBF$ ，又因為

$\angle ANO = \angle BFR = 90^\circ$ ，且 $\overline{AN} = \overline{AG} - \overline{GN} = \overline{CF} - \overline{BC} = \overline{BF}$ ，所以

$$\Delta AON \cong \Delta BRF \text{ (ASA 全等)}.$$

2. 先證明三角形 ELD 與三角形 CAB 全等，再得到 $\overline{EL} = \overline{CA}$：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AL} // \overline{BD}$, $\overline{LD} // \overline{AB}$ ，故四邊形 $ALDB$ 為平行四邊形，因此

$\overline{BD} = \overline{BC}$ ，又因為 $\overline{ED} = \overline{CB}$, $\angle E = \angle ACB = 90^\circ$，所以

$$\Delta ELD \cong \Delta CAB \text{ (RHS 全等)}.$$

3. 先證明三角形 AGL 與三角形 CAB 全等，再得到 $\angle AGL = \angle CAB$, $\overline{LG} = \overline{AH}$ ：

因為 $\overline{EL} = \overline{CA}$，所以 $\overline{AL} = \overline{CA} - \overline{LC} = \overline{EL} - \overline{LC} = \overline{EC} = \overline{CB}$ ，又 $\overline{AG} = \overline{AC}$,

$\angle GAL = \angle ACB = 90^\circ$，所以

$$\Delta AGL \cong \Delta CAB \text{ (SAS 全等)}.$$

可得到

$$\angle AGL = \angle CAB,\ \overline{LG} = \overline{BA} = \overline{AH}.$$

4. 先證明 $\overline{LG} // \overline{AH}$ ，再得到 $L-M-G$ 共線, $\overline{LM} = \overline{PH}$ ：

因為 $\angle CAB = 90° - \angle GAB = \angle HAG$ ，又 $\angle AGL = \angle CAB$，所以 $\angle AGL = \angle HAG$，故

$$\overline{LG} // \overline{AH} \text{ (內錯角相等)}.$$

又因為 $\overline{LM} // \overline{AH}$ ，所以 $L-M-G$ 共線。

由作圖的平行關係可知四邊形 $APGM$ 為長方形，因此 $\overline{AP} = \overline{MG}$ ，又因為 $\overline{LG} = \overline{AH}$ ，所以

$$\overline{LM} = \overline{LG} - \overline{MG} = \overline{AH} - \overline{AP} = \overline{PH}.$$

5. 證明四邊形 $PQKH$ 的面積與正方形 $BCED$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $PQKH$ 為長方形，四邊形 $LDBA$ 為平行四邊形，因此

$$\begin{aligned}\text{長方形}PQKH\text{ 面積} &= \overline{PQ}\times\overline{PH}\\ &= \overline{AB}\times\overline{LM}\\ &= \text{平行四邊形}LDBA\text{面積}\\ &= \overline{BD}\times\overline{BC}\\ &= \text{正方形}BCED\text{ 面積.}\end{aligned}$$

6. 證明三角形 IOP 與三角形 GRQ 全等：

因為 $\Delta AON\cong\Delta BRF$，所以 $\overline{AO}=\overline{BR}$，又 $\overline{AP}=\overline{BQ}$，故 $\overline{OP}=\overline{AP}-\overline{AO}=\overline{BQ}-\overline{BR}=\overline{RQ}$.

且由作圖的平行關係可知 $\angle IPO=\angle GQR=90^\circ$, $\angle IOP=\angle GRQ$，因此

$$\Delta IOP\cong\Delta GRQ\ (\text{ASA 全等}).$$

7. 證明三角形 NIG 與三角形 CAB 全等，：

因為 $\overline{GN}=\overline{BC}$，且由作圖的平行關係可知 $\angle ING=\angle ACB=90^\circ$, $\angle IGN=\angle ABC$，

所以

$$\Delta NIG\cong\Delta CAB\ (\text{ASA 全等}).$$

8. 說明四邊形 $ONGP$ 與三角形 GRQ 的面積和等於三角形 NIG 的面積：

因為 $\Delta IOP\cong\Delta GRQ$, $\Delta NIG\cong\Delta CAB$，所以

$$\begin{aligned}\text{四邊形}ONGP\text{面積}+\Delta GRQ\text{面積} &= \text{四邊形}ONGP\text{面積}+\Delta IOP\text{面積}\\ &= \Delta NIG\text{面積}\\ &= \Delta CAB\text{面積.}\end{aligned}$$

9. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積} &= \text{四邊形}ABRG\text{面積}+\Delta AON\text{面積}\\ &\quad+(\text{四邊形}ONGP\text{面積}+\Delta GRQ\text{面積})+\text{長方形}PQKH\text{面積}\\ &= \text{四邊形}ABRG\text{面積}+\Delta BRF\text{面積}+\Delta CAB\text{面積}\\ &\quad+\text{正方形}BCED\text{面積}\\ &= \text{正方形}ACFG\text{面積}+\text{正方形}BCED\text{面積.}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 7 月 20 日想出來的。

2. 心得：此題的作圖與 G095 相似，但證明過程更加繁瑣，證明的關鍵在於 $L-M-G$ 三點共線。此外，原作者所寫的三角形 ALM 與三角形 GRQ 的面積相等，是錯誤的，因此又另作一個與三角形 GRQ 全等的三角形 IOP 來輔助證明。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
			●	