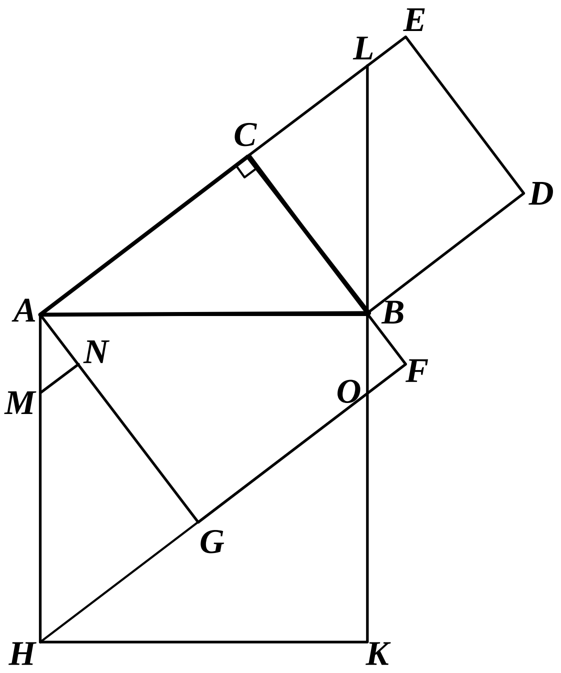
勾股定理證明-G093

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明$H-G-F$共線)。
2. 延長$\overline{KB}$，使其與$\overline{CE}$相交於L。
3. 在$\overline{AG}$上取一點N，使得$\overline{GN}=\overline{BC}$，並過$N$作$\overline{NM}\,//\,\overline{AC}$，交$\overline{AH}$於$M$點。
4. 連接$\overline{HG}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的增補與移除關係後，可得到正方形$ABKH$的面積會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到$H-G-F$共線：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle AGH=\angle ACB=90^\circ$，又$\angle AGF=90^\circ$，所以$\angle AGH+\angle AGF=180^\circ$，故

$$H-G-F\text{ 共線。}$$

2. 證明三角形 AMN 與三角形 BOF 全等：

因為 $\overline{AN}=\overline{AG}-\overline{GN}=\overline{CF}-\overline{BC}=\overline{BF}$ ，且由作圖的平行關係可知

$\angle ANM=\angle BFO=90°,\ \ \angle MAN=\angle OBF$ ，所以

$$\Delta AMN\cong\Delta BOF\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 證明四邊形 $MNGH$ 與四邊形 $LEDB$ 全等：

由作圖的平行關係可知

$\angle HMN=\angle BLE,\ \angle MHG=\angle LBD,\ \angle MNG=\angle LED,\ \angle NGH=\angle EDB$ ，且

$\overline{GN}=\overline{BC}=\overline{DE},\ \overline{HG}=\overline{BC}=\overline{BD}$ ，因此

$$\text{四邊形}MNGH\cong\text{四邊形}LEDB.$$

4. 證明三角形 OHK 與三角形 LAB 全等：

因為 $\overline{HK}=\overline{AB},\ \angle OKH=\angle LBA=90^{\circ}$ ，且由作圖的平行關係可知 $\angle LAB=\angle OHK$ ，所以

$$\Delta OHK\cong\Delta LAB\ (\text{ASA 全等}).$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\text{四邊形}AGOB\text{面積}+\Delta AMN\text{面積}+\text{四邊形}MNGH\text{ 面積}\\&\quad+\Delta OHK\text{面積}\\&=\text{四邊形}AGOB\text{面積}+\Delta BOF\text{面積}+\text{四邊形}LEDB\text{面積}\\&\quad+\Delta LAB\text{面積}\\&=\text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Richard A. Bell 在 1918 年 7 月 1 日想到的，並在 1938 年 2 月 28 日提供。之後也在以下書籍找到證明：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 268.

2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 ABC 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，再證明三角形 AMN 與三角形 BOF 全等，三角形 OHK 與三角形 LAB 全等，以及四邊形 $MNGH$ 與四邊形 $LEDB$ 全等。進而透過平移與旋

轉的拼圖方法推得正方形 *ABKH* 面積會等於正方形 *ACFG* 與正方形 *BCED* 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：