勾股定理證明-G092

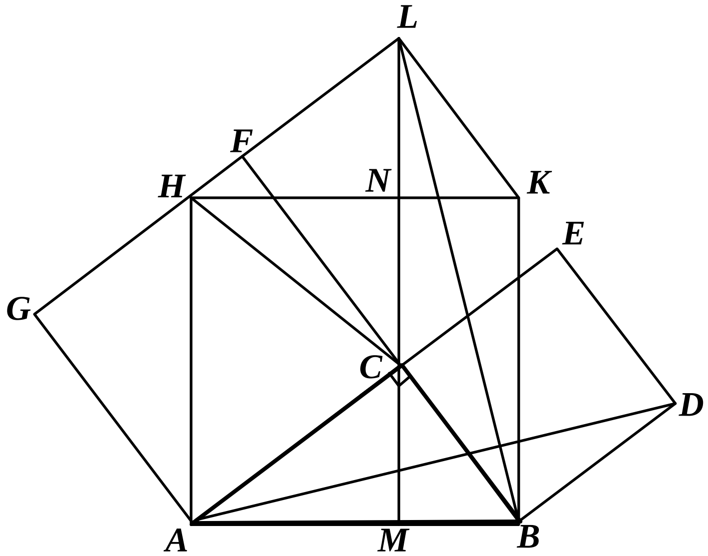
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABKH$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $ACFG$ (於證明過程第 1 點說明點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。

2. 過 K 作 $\overline{BC}$ 的平行線，並在線上取一點 L 使得 $\overline{KL}=\overline{BC}$。

3. 過 L 作 $\overline{AB}$ 之垂線，分別與 $\overline{HK}$, $\overline{AB}$ 交於 N 點，M 點。

4. 連接 $\overline{CH}$, $\overline{LB}$, $\overline{AD}$, $\overline{FL}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向上向外作正方形，先利用正方形 $ABKH$ 的面積會等於兩個長方形的面積和，再找出長方形與三角形的面積關係，最後由底高的面積計算得到這兩個長方形的面積和會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，再得到點 H 的位置在 $\overline{GF}$ 上：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle FGA=90^\circ$，所以

點 H 在 $\overline{GF}$ 上，即 $G-H-F$ 共線。

2. 先證明四邊形 $LKBC$ 為平行四邊形，再得到 $L-C-M$ 共線：

因為 $\overline{KL} // \overline{BC}$ ，且 $\overline{KL}=\overline{BC}$ ，所以

四邊形 $LKBC$ 為平行四邊形.

得到 $\overline{LC}=\overline{KB}$ ，且 $\overline{LC} // \overline{KB}$ ，又 $\overline{LM} \perp \overline{AB}$ ，即 $\overline{LM} // \overline{KB}$ ，故

點 C 在 $\overline{LM}$ 上，即 $L-C-M$ 共線。

3. 證明四邊形 $HLMA$ 與四邊形 $LKBM$ 皆為長方形：

因為 $\overline{LM} \perp \overline{AB}$ ，所以 $\angle LMA=90°$ ，四邊形 $HLMA$ 的四個內角皆為 $90°$ ，故

四邊形 $HLMA$ 為長方形.

同理

四邊形 $LKBM$ 為長方形.

4. 證明三角形 LCB 與三角形 ABD 全等：

因為 $\overline{BC}=\overline{BD}$, $\overline{LC}=\overline{KB}=\overline{AB}$, 且由作圖的平行關係可知 $\angle LKN=\angle CBA$ ，

$$
\begin{aligned}
\angle LCB &= \angle LKB \text{ (平行四邊形的對角相等)} \\
&= \angle LKN+\angle BKN \\
&= \angle CBA+\angle CBD \\
&= \angle ABD.
\end{aligned}
$$

所以

$$\Delta LCB \cong \Delta ABD \text{(SAS 全等)}.$$

5. 找出長方形與正方形的面積關係：

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}NKBM\text{ 面積} &= \overline{BK}\times\overline{BM} \\
&= \text{平行四邊形}LKBC\text{ 面積} \\
&= 2\times\Delta LCB\text{ 面積} \\
&= 2\times\Delta ABD\text{ 面積} \\
&= 2\times(\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BC}) \\
&= \overline{BD}\times\overline{BC} \\
&= \text{正方形}BCED\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

且

$$\text{長方形}HNMA\text{面積}=\overline{AH}\times\overline{AM}$$
$$=2\times\Delta ACH\text{ 面積}$$
$$=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AG})$$
$$=\overline{AC}\times\overline{AG}$$
$$=\text{正方形}ACFG\text{ 面積.}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\text{正方形}ABKH\text{ 面積}=\text{長方形}NKBM\text{ 面積}+\text{長方形}HNMA\text{面積}$$
$$=\text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積.}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1891 年 7 月 15 日在加拿大多倫多市的一家二手書店買下的書中所記載的。
2. 心得：此題證明的關鍵在於證明三角形 LCB 與三角形 ABD 全等，觀念是將正方形 $ABKH$ 切割成兩個長方形，再透過輔助線將長方形面積轉移為三角形面積的計算，進而推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		