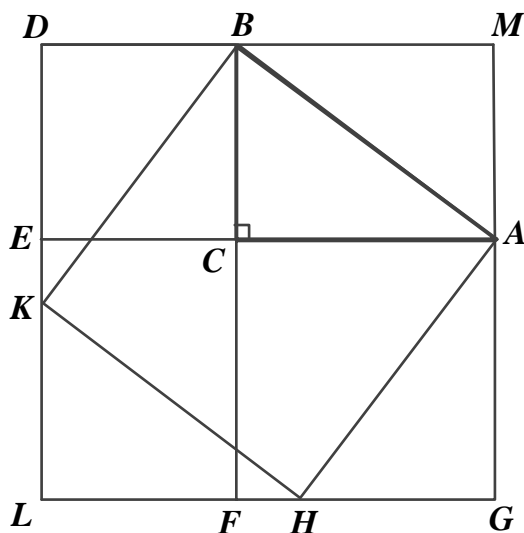


勾股定理證明-G091

【作輔助圖】

1. 以 \overline{AB} 為邊，向內作一正方形 $ABKH$ ，以 \overline{BC} 為邊，向外作一正方形 $BCED$ ，以 \overline{AC} 為邊，向外作一正方形 $ACFG$ (於證明過程第 1 點說明點 H 在 \overline{GF} 上)。
2. 分別延長 \overline{GF} 與 \overline{DE} ，使其相交於 L 點 (於證明過程第 2 點說明點 K 在 \overline{LE} 上)。
3. 分別延長 \overline{GA} ， \overline{DB} ，使其相交於 M 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，推得四邊形 $DMGL$ 為正方形，再利用正方形 $DMGL$ 的面積分割拆解，得到正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，再得到點 H 的位置在 \overline{GF} 上：

因為 $\overline{AH} = \overline{AB}$ ， $\overline{AG} = \overline{AC}$ ， $\angle GAH = 90^\circ - \angle HAC = \angle CAB$ ，所以

$$\triangle GAH \cong \triangle CAB \text{ (SAS 全等).}$$

得到 $\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$ ，又 $\angle FGA = 90^\circ$ ，所以

點 H 在 \overline{GF} 上，即 $G-H-F$ 共線。

2. 先證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，再得到點 K 的位置在 \overline{LE} 上：

因為 $\overline{KB} = \overline{AB}$ ， $\overline{BD} = \overline{BC}$ ， $\angle DBK = 90^\circ - \angle NBC = \angle CBA$ ，所以

$$\triangle DKB \cong \triangle CAB \text{ (SAS 全等).}$$

得到 $\angle BDK = \angle BCA = 90^\circ$ ，又 $\angle EDB = 90^\circ$ ，所以

點 K 在 \overline{LE} 上，即 $L-K-E$ 共線。

3. 證明三角形 LHK 與三角形 CAB 全等：

因為 $\overline{HK} = \overline{AB}$ ，又由平行關係可得到 $\angle LHK = \angle CAB$ 與 $\angle LKH = \angle CBA$ ，所以

$$\triangle LHK \cong \triangle CAB \text{ (ASA 全等).}$$

4. 證明三角形 MBA 與三角形 CAB 全等：

因為 $\overline{MB} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{AM} \parallel \overline{CB}$ ，所以 $\angle MBA = \angle CAB$ ， $\angle MAB = \angle CBA$ ，又 $\overline{AB} = \overline{AB}$ 。

故

$$\triangle MBA \cong \triangle CAB \text{ (ASA 全等).}$$

5. 證明四邊形 $DMGL$ 為正方形：

因為 $\triangle GAH \cong \triangle DKB \cong \triangle LHK \cong \triangle MBA \cong \triangle CAB$ ，所以

$$\angle AGH = \angle HLK = \angle KDB = \angle BMA = \angle ACB = 90^\circ，$$

$$\text{且 } \overline{DM} = \overline{DB} + \overline{BM} = \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{MA} + \overline{AG} = \overline{MG}，$$

因此

四邊形 $DMGL$ 為正方形，其邊長為 $\overline{BC} + \overline{AC}$ 。

6. 找出長方形與三角形的面積關係：

$$\begin{aligned} \text{長方形 } ECFL \text{ 面積} &= \overline{EC} \times \overline{CF} \\ &= \overline{BC} \times \overline{AC} \\ &= 2 \times \triangle CAB \text{ 面積.} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \text{長方形 } BMAC \text{ 面積} &= \triangle CAB \text{ 面積} + \triangle MBA \text{ 面積} \\ &= 2 \times \triangle CAB \text{ 面積.} \end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned} \text{正方形}DMGL \text{面積} &= \text{正方形}ABKH \text{面積} + \triangle GAH \text{面積} + \triangle LHK \text{面積} + \triangle DKB \text{面積} \\ &\quad + \triangle MBA \text{面積} \\ &= \text{正方形}ABKH \text{面積} + 4 \times \triangle CAB \text{面積}. \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \text{正方形}DMGL \text{面積} &= \text{正方形}BCED \text{面積} + \text{正方形}ACFG \text{面積} + \text{長方形}ECFL \text{面積} \\ &\quad + \text{長方形}BMAC \text{面積} \\ &= \text{正方形}BCED \text{面積} + \text{正方形}ACFG \text{面積} + 2 \times \triangle CAB \text{面積} + 2 \times \triangle CAB \text{面積} \\ &= \text{正方形}BCED \text{面積} + \text{正方形}ACFG \text{面積} + 4 \times \triangle CAB \text{面積}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABKH \text{面積} + 4 \times \triangle CAB \text{面積} &= \text{正方形}BCED \text{面積} + \text{正方形}ACFG \text{面積} + 4 \times \triangle CAB \text{面積}. \\ \text{正方形}ABKH \text{面積} &= \text{正方形}BCED \text{面積} + \text{正方形}ACFG \text{面積}. \end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 41). Amsterdam: A. Versluys.

E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 80). Paris: Vuibert et Nony.

J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 1(5), 159.

2. 心得：此題證明的作圖十分特別，延長正方形 $BCED$ 正方形 $ACFG$ 的邊長後可得到一個更大的正方形 $DMGL$ 。而證明的關鍵在於證明正方形 $DMGL$ 邊上的四個三角形皆全等，再透過面積相等的代數運算就能推得出正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：魯米斯指出此證明在透過面積的拼湊是屬於幾何部分，而在計算面積的過程，是屬於代數部分。