勾股定理證明-G090

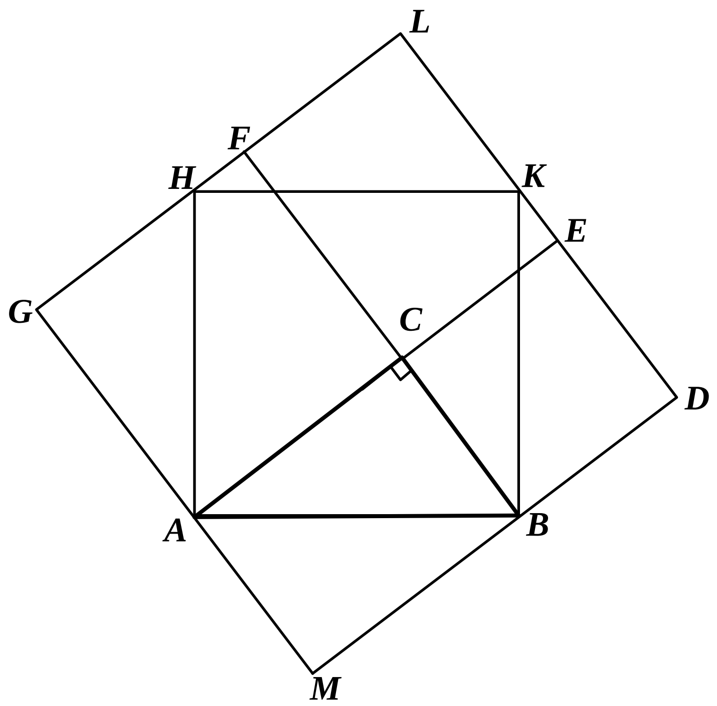
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$

   為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 分別延長$\overline{GF}$與$\overline{DE}$，使其相交於L點(於證明過程第 2 點說明點K在$\overline{LE}$上)。

3. 分別延長$\overline{GA}$, $\overline{DB}$，使其相交於M點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，推得四邊形$GLDM$為正方形，再利用正方形$GLDM$的面積分割拆解，得到正方形$ABKH$的面積會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

   因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^{\circ}-\angle HAC=\angle CAB$，所以

   $$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

   得到$\angle HGA=\angle BCA=90^{\circ}$，又$\angle FGA=90^{\circ}$，所以

   點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形DKB與三角形CAB全等，再得到點K的位置在$\overline{LE}$上：

因為$\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^{\circ}-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle BDK=\angle BCA=90^{\circ}$，又$\angle EDB=90^{\circ}$，所以

點K在$\overline{LE}$上，即$L-K-E$共線。

3. 證明三角形LHK與三角形CAB全等：

因為$\overline{HK}=\overline{AB}$，又由平行關係可得到$\angle LHK=\angle CAB$與$\angle LKH=\angle CBA$，所以

$$\Delta LHK\cong\Delta CAB(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明三角形MBA與三角形CAB全等：

因為$\overline{MB}//\overline{AC}$, $\overline{AM}//\overline{CB}$，所以$\angle MBA=\angle CAB$, $\angle MAB=\angle CBA$，又$\overline{AB}=\overline{AB}$.

故

$$\Delta MBA\cong\Delta CAB(\text{ ASA 全等}).$$

5. 證明四邊形$GLDM$為正方形：

因為$\Delta GAH\cong\Delta DKB\cong\Delta LHK\cong\Delta MBA\cong\Delta CAB$，所以

$$\angle AGH=\angle HLK=\angle KDB=\angle BMA=\angle ACB=90^\circ，$$

且$\overline{GM}=\overline{GA}+\overline{AM}=\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{HL}+\overline{GH}=\overline{GL}$，

因此

四邊形$GLDM$為正方形，其邊長為$\overline{BC}+\overline{AC}$。

6. 找出長方形與三角形的面積關係：

$$\begin{aligned}\text{長方形}LECF\text{ 面積}&=\overline{FC}\times\overline{CE}\\&=\overline{AC}\times\overline{BC}\\&=2\times\Delta CAB\text{ 面積}.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\text{長方形}ACBM\text{ 面積}&=\Delta CAB\text{ 面積}+\Delta MBA\text{ 面積}\\&=2\times\Delta CAB\text{ 面積}.\end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$GLDM$ 面積＝正方形$ABKH$ 面積＋ΔGAH 面積＋ΔLHK 面積＋ΔDKB 面積

＋ΔMBA 面積

$=$正方形$ABKH$ 面積$+4\times\Delta CAB$ 面積.

且

正方形$GLDM$ 面積＝正方形$BCED$ 面積＋正方形$ACFG$ 面積＋長方形$LECF$ 面積

＋ 長方形$ACBM$ 面積

$=$正方形$BCED$ 面積＋正方形$ACFG$ 面積$+2\times\Delta CAB$ 面積$+2\times\Delta CAB$ 面積

$=$正方形$BCED$ 面積＋正方形$ACFG$ 面積$+4\times\Delta CAB$ 面積.

因此

正方形$ABKH$ 面積$+4\times\Delta CAB$ 面積＝正方形$BCED$ 面積＋正方形$ACFG$ 面積$+4\times\Delta CAB$ 面積.

正方形$ABKH$ 面積＝正方形$BCED$ 面積＋正方形$ACFG$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 17). Leipz.: Friese.

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.157). New York : Macmillan and co.

Heath’s Mathematical Monographs, 1900, No. 1, p. 18, proof XXI.

2. 心得：此題證明的作圖十分特別，延長正方形$BCED$ 正方形$ACFG$ 的邊長後可得到一個更大的正方形$GLDM$。而證明的關鍵在於證明正方形$GLDM$ 邊上的四個三角形皆全等，再透過面積相等的計算，推得正方形$ABKH$ 的面積會等於正方形$ACFG$ 與正方形$BCED$ 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		