勾股定理證明-G089

【作輔助圖】

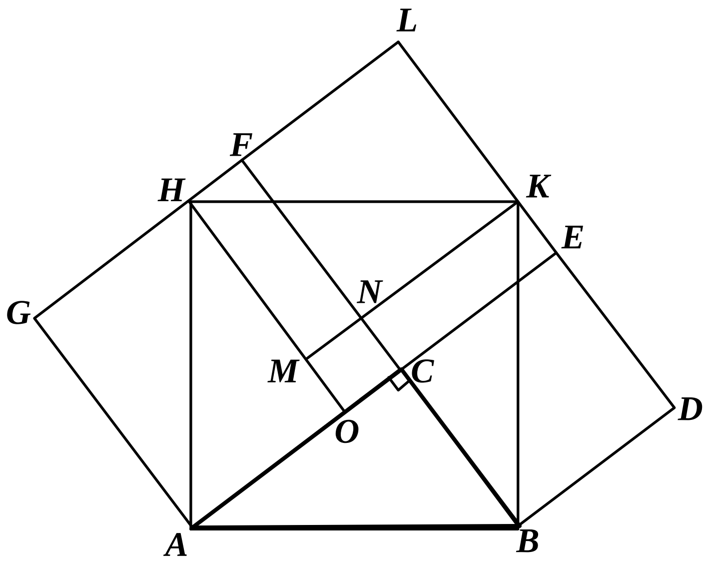
1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 延長$\overline{GF}$，並在$\overline{GF}$的延長線上取一點L，使得$\overline{FL}=\overline{BC}$。

3. 連接$\overline{KL}$，$\overline{KE}$(於證明過程第 2 點說明$K-E-D$共線)。

4. 從H點作$\overline{FB}$的平行線，與$\overline{AC}$交於O點。

5. 從K點作$\overline{AE}$的平行線，分別與$\overline{CF}$交於N點，與$\overline{HO}$交於M點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，將正方形$ABKH$區域切割為兩個三角形、一個四邊形與一個凹五邊形，再利用全等形狀的增補與移除關係，分別得到正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積，最後推得勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，$\angle GAH=90^{\circ}-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^{\circ}$，又$\angle FGA=90^{\circ}$，所以

點 H 在 $\overline{GF}$ 上，即 $G-H-F$ 共線。

2. 先證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，再得到 $K-E-D$ 共線：

因為 $\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^\circ-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB\,(\text{SAS 全等}).$$

得到 $\angle BDK=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle BDE=90^\circ$，所以

$$K-E-D\ \text{共線。}$$

3. 證明三角形 NBK 與三角形 CAB 全等，得到 $\overline{NK}=\overline{BC}$：

由作圖的平行關係可知 $\angle KNB=90^\circ=\angle BCA$，又 $\overline{KB}=\overline{AB}$,

$\angle NBK=90^\circ-\angle CBA=\angle CAB$，所以

$$\Delta NBK\cong\Delta CAB\,(\text{AAS 全等}).$$

得到

$$\overline{NK}=\overline{BC}.$$

4. 證明四邊形 $FLKN$ 為長方形：

由作圖的平行關係可知 $\overline{NK}\,//\,\overline{FL}$，又因為 $\overline{NK}=\overline{BC}=\overline{FL}$，所以四邊形 $FLKN$ 為平行四邊形，可得到

$$\overline{LK}\,//\,\overline{FN},\ \angle HLK=\angle GFC=90^\circ.$$

因此

四邊形 $FLKN$ 為長方形.

5. 先證明三角形 LHK 與三角形 NBK 全等，進而推得四邊形 $FLKN$ 為正方形：

因為 $\overline{HK}=\overline{BK}$, $\angle HLK=\angle BNK=90^\circ$，且 $\angle LKH=90^\circ-\angle HKM=\angle NKB$，所以

$$\Delta LHK\cong\Delta NBK\,(\text{AAS 全等}).$$

得到

$$\overline{LK}=\overline{NK}.$$

又因為四邊形 $FLKN$ 為長方形，所以

四邊形 $FLKN$ 為正方形.

且 $\overline{NK}=\overline{BC}$，因此

$$\text{正方形}FLKN\text{面積}=\text{正方形}BCED\text{面積}.$$

6. 證明凹五邊形 $MNBKH$ 的面積與長方形 $HLKM$ 的面積相等：
   由作圖平行關係可知四邊形 $HLKM$ 為長方形，又因為 $\Delta NBK \cong \Delta LHK$ ，因此

$$\begin{aligned}\text{凹五邊形}MNBKH\text{面積} &= \Delta KHM\text{面積}+\Delta NBK\text{面積}\\ &= \Delta KHM\text{面積}+\Delta LHK\text{面積}\\ &= \text{長方形}HLKM\text{面積}.\end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta CAB\text{面積}+\Delta AHO\text{面積}+\text{四邊形}MNCO\text{面積}+\text{凹五邊形}MNBKH\text{面積}\\ &= \Delta GAH\text{面積}+\Delta AHO\text{面積}+\text{四邊形}MNCO\text{面積}+\text{長方形}HLKM\text{面積}\\ &= \Delta GAH\text{面積}+\Delta AHO\text{面積}+\text{四邊形}MNCO\text{面積}\\ &\quad +(\text{長方形}HFNM\text{面積}+\text{正方形}FLKN\text{面積})\\ &= (\Delta GAH\text{面積}+\Delta AHO\text{面積}+\text{四邊形}MNCO\text{面積}+\text{長方形}HFNM\text{面積})\\ &\quad +\text{正方形}FLKN\text{面積}\\ &= \text{正方形}ACFG\text{面積}+\text{正方形}BCED\text{面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 7 月 30 日想到的。除此之外，以下期刊及書籍也有類似的證明：
   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p.84). Paris: Vuibert et Nony.
2. 心得：此題證明的作圖並不困難，輔助線皆與三角形的三邊平行。而證明的關鍵在於證明三角形 LHK 與三角形 NBK 全等以及正方形 NBK 與正方形 NBK 的面積相等，進一步透過圖形的切割與平移，推得勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在原書的圖形並沒有畫出 $\overline{HK}$ ，但如果沒有此線段，將很難說明凹五邊形 $MNBKH$ 與長方形 $HLKM$ 的面積相等，因此在作圖中畫出 $\overline{HK}$ 。