勾股定理證明-G088

【作輔助圖】

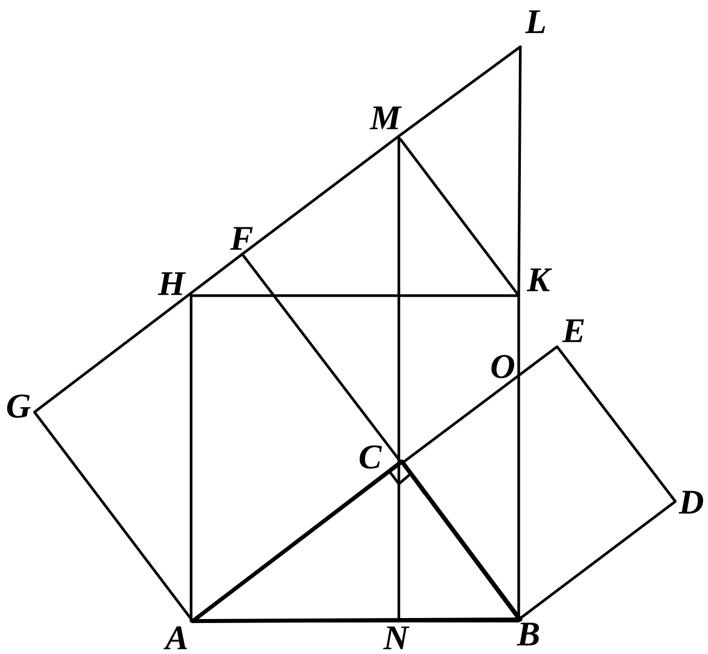
1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. $\overline{CE}$與$\overline{BK}$相交於O點。

3. 分別延長$\overline{GF}$與$\overline{BK}$，使其相交於L點。

4. 過C點作$\overline{MN} // \overline{BK}$，分別交$\overline{FL}$於$M$點，交$\overline{AB}$於$N$點。

5. 連接$\overline{MK}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，推得正方形$ABKH$的面積會等於兩個平行四邊形的面積和，再利用底高的面積計算得到這兩個平行四邊形的面積和會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，來推得勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH = 90^\circ - \angle HAC = \angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又$\angle FGA = 90^\circ$，所以

$$\text{點} H \text{在} \overline{GF} \text{上，即} G - H - F \text{共線。}$$

2. 證明四邊形$HLOA$、四邊形$HMCA$、四邊形$MLOC$皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係得知$\overline{HL} // \overline{AE}$, $\overline{HA} // \overline{LO}$，因此

$$\text{四邊形} HLOA \text{為平行四邊形}.$$

同理，因為$\overline{MN} // \overline{BK}$，所以$\overline{AH} // \overline{MC} // \overline{LO}$，因此

$$\text{四邊形} HMCA \text{與四邊形} MLOC \text{皆為平行四邊形}.$$

3. 證明三角形MHK與三角形CAB全等，得到$\overline{MK} // \overline{BC}$：

因為四邊形$HMCA$為平行四邊形，所以$\overline{HM} = \overline{AC}$, $\angle MHK = \angle CAB$，又$\overline{HK} = \overline{AB}$，所以

$$\Delta MHK \cong \Delta CAB(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle KMH = \angle BCA = 90^\circ$，又$\overline{HM} // \overline{AC}$，因此

$$\overline{MK} // \overline{BC}.$$

4. 證明四邊形$MKBC$為平行四邊形：

因為$\overline{MN} // \overline{BK}$, $\overline{MK} // \overline{BC}$，所以

$$\text{四邊形} MKBC \text{為平行四邊形}.$$

5. 找出平行四邊形與正方形的面積關係：

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形} MLOC \text{面積} &= \text{平行四邊形} MKBC \text{面積(同底等高)} \\ &= \overline{BC} \times \overline{CE} \\ &= \text{正方形} BCED \text{面積}.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形} HMCA \text{面積} &= \overline{AC} \times \overline{CF} \\ &= \text{正方形} ACFG \text{面積}.\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$面積$=\overline{AH}\times\overline{HK}$

$=$平行四邊形$HLOA$面積(同底等高)

$=$平行四邊形$MLOC$面積$+$平行四邊形$HMCA$面積

$=$正方形$BCED$面積$+$正方形$ACFG$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 27). Leipz.: Friese.

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 20). Amsterdam: A. Versluys.

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p.73). Paris: Vuibert et Nony.

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 251.

2. 心得：此題證明的作圖並不困難，都是運用平行線的概念，而證明的關鍵在於將平行四邊形面積轉移為正方形面積的計算，進而推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		