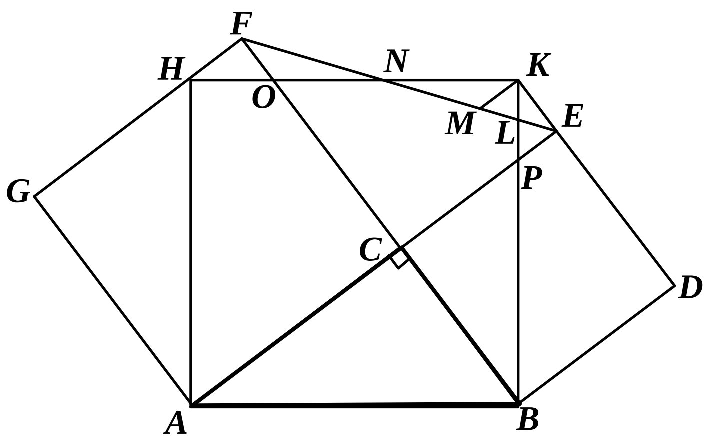
勾股定理證明-G087

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 連接$\overline{EK}$, $\overline{EF}$(於證明過程第 2 點說明$K-E-D$共線)。

3. 過K作$\overline{KM}$ // $\overline{AE}$，交$\overline{EF}$於M點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的增補與移除關係後，可得到正方形$ABKH$的面積會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^{\circ}-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^{\circ}$，又$\angle FGA=90^{\circ}$，所以

點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形DKB與三角形CAB全等，再得到$K-E-D$共線：

因為$\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^{\circ}-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle BDK=\angle BCA=90^{\circ}$，又$\angle BDE=90^{\circ}$，所以

$$K-E-D\text{共線。}$$

3. 證明三角形HFO與三角形KEP全等：

因為$\Delta GAH\cong\Delta CAB\cong\Delta DKB$，所以$\angle BKD=\angle HAG$, $\overline{GA}=\overline{DK}$, $\overline{GH}=\overline{DB}$.

在ΔHFO和ΔKEP中，因為 $\angle FHO=90^{\circ}-\angle GHA=\angle GAH=\angle DKB=\angle EKP$，且

$\overline{HF}=\overline{GF}-\overline{GH}=\overline{GA}-\overline{GH}=\overline{DK}-\overline{BD}=\overline{DK}-\overline{DE}=\overline{KE}$，又$\angle HFO=\angle KEP=90^{\circ}$，故

$$\Delta HFO\cong\Delta KEP\text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明三角形FCE與三角形KDB全等：

因為$\overline{FC}=\overline{AC}=\overline{KD}$, $\overline{CE}=\overline{BD}$, $\angle FCE=\angle KDB=90^{\circ}$，所以

$$\Delta FCE\cong\Delta KDB\text{(SAS 全等)}.$$

5. 證明三角形EKM與三角形KEP全等：

因為$\Delta FCE\cong\Delta KDB$，所以$\angle KEM=90^{\circ}-\angle FEC=90^{\circ}-\angle KBD=\angle EKP$，又$\overline{KE}=\overline{KE}$,

$\angle EKM=\angle KEP=90^{\circ}$，故

$$\Delta EKM\cong\Delta KEP\text{(ASA 全等)}.$$

又因為$\Delta HFO\cong\Delta KEP$，所以可得到

$$\Delta EKM\cong\Delta KEP\cong\Delta HFO.$$

6. 證明三角形MLK與三角形PLE的面積相等：

因為$\Delta EKM\cong\Delta KEP$，所以

$$\begin{aligned}\Delta MLK\text{ 面積}&=\Delta EKM\text{ 面積}-\Delta KLE\text{ 面積}\\&=\Delta KEP\text{ 面積}-\Delta KLE\text{ 面積}\\&=\Delta PLE\text{ 面積}.\end{aligned}$$

7. 證明三角形EKN與三角形HFN全等：

因為$\Delta EKM\cong\Delta HFO$，所以$\overline{EK}=\overline{HF}$, $\angle KEM=\angle FHO$，又$\angle KNE=\angle FNH$，故

$$\Delta EKM\cong\Delta HFO\text{(AAS 全等)}.$$

8. 證明三角形MNK與三角形ONF全等：

因為$\Delta EKM\cong\Delta HFO$, $\Delta EKM\cong\Delta HFO$，所以

$$\begin{aligned}\Delta MNK\text{ 面積}&=\Delta EKN\text{ 面積}-\Delta EKM\text{ 面積}\\&=\Delta HFN\text{面積}-\Delta HFO\text{ 面積}\\&=\Delta ONF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

9. 證明四邊形$OKPC$與三角形BDK的面積相等：

因為ΔMNK面積$=\Delta HFO$面積，ΔMLK面積$=\Delta PLE$面積，且$\Delta FCE \cong \Delta KDB$，所以

四邊形$OKPC$面積＝五邊形$ONLPC$面積＋ΔMNK面積＋ΔMLK面積

＝五邊形$ONLPC$面積＋ΔONF面積＋ΔPLE面積

＝ΔFCE面積

＝ΔBDK面積.

10. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$面積＝四邊形$OKPC$面積＋ΔBCP面積＋四邊形$ACOH$面積

＋ΔCAB面積

＝ΔBDK面積＋ΔBCP面積＋四邊形$ACOH$面積＋ΔGAH面積

＝(四邊形$BDEP$面積＋ΔKEP面積)＋ΔBCP面積

＋四邊形$ACOH$面積＋ΔGAH面積

＝四邊形$BDEP$面積＋ΔHFO面積＋ΔBCP面積

＋四邊形$ACOH$面積＋ΔGAH面積

＝(四邊形$BDEP$面積＋ΔBCP面積)＋(ΔHFO面積

＋四邊形$ACOH$面積＋ΔGAH面積)

＝正方形$BCED$面積＋正方形$ACFG$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 251.

2. 心得：此題證明的關鍵在於證明三角形HFO，三角形KEP與三角形EKM皆全等，以及三角形MNK與三角形ONF全等，進一步透過平移與旋轉的拼圖方法證明畢氏定理。

＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	