勾股定理證明-G086

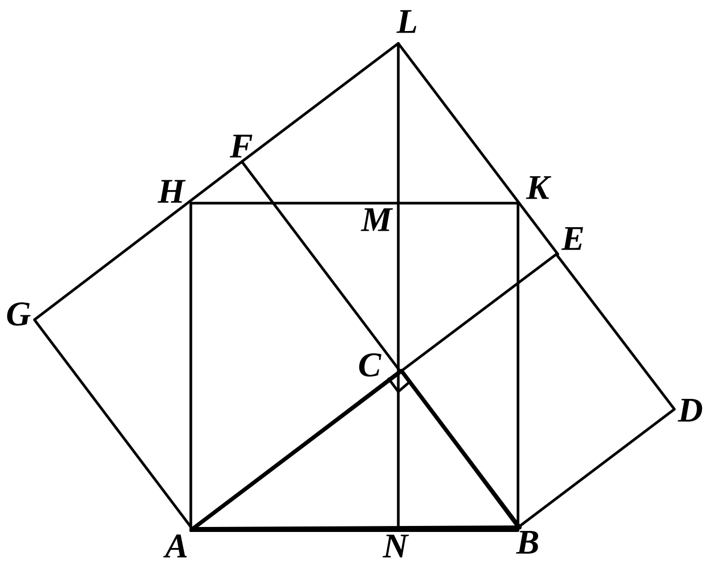
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 分別延長$\overline{GF}$與$\overline{DE}$，使其相交於L點(於證明過程第 2 點說明點K在$\overline{LE}$上)。

3. 連接$\overline{LC}$，使其與$\overline{HK}$交於M點。

4. 延長$\overline{MC}$，使其與$\overline{AB}$交於N點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，推得正方形$ABKH$的面積會等於兩個平行四邊形的面積和，再利用底高的面積計算得到這兩個平行四邊形的面積和會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，來推得勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，$\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\,(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，再得到點 K 的位置在 $\overline{LE}$ 上：

因為 $\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK = 90^\circ - \angle NBC = \angle CBA$，所以

$$\Delta DKB \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle BDK = \angle BCA = 90^\circ$，又 $\angle EDB = 90^\circ$，所以

點 K 在 $\overline{LE}$ 上，即 $L-K-E$ 共線。

3. 證明三角形 LHK 與三角形 CAB 全等：

因為 $\overline{HK}=\overline{AB}$，又由平行關係可得到 $\angle LHK = \angle CAB$ 與 $\angle LKH = \angle CBA$，所以

$$\Delta LHK \cong \Delta CAB \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明四邊形 $HLCA$ 與四邊形 $LKBC$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係得知 $\overline{HL} // \overline{AC}$，又因為 $\Delta LHK \cong \Delta CAB$，所以 $\overline{HL}=\overline{AC}$.

因此

四邊形 $HLCA$ 為平行四邊形.

同理，$\overline{LK} // \overline{CB}$, $\overline{LK}=\overline{CB}$，故

四邊形 $LKBC$ 為平行四邊形.

5. 找出平行四邊形與正方形的面積關係：

平行四邊形 $LKBC$ 面積 $=\overline{BC}\times\overline{CE}$
$=$ 正方形 $BCED$ 面積.

且

平行四邊形 $HLCA$ 面積 $=\overline{AC}\times\overline{CF}$
$=$ 正方形 $ACFG$ 面積.

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形 $ABKH$ 面積 $=$ 六邊形 $ABDKHG$ 面積 $-\Delta GAH$ 面積 $-\Delta DKB$ 面積
$=$ 六邊形 $ABDKHG$ 面積 $-\Delta GAH$ 面積 $-\Delta CAB$ 面積
$=$ 凹六邊形 $ACBDKH$ 面積
$=$ 凹五邊形 $ACBKH$ 面積 $+\Delta DKB$ 面積
$=$ 凹五邊形 $ACBKH$ 面積 $+\Delta LHK$ 面積
$=$ 凹六邊形 $ACBKLH$ 面積
$=$ 平行四邊形 $LKBC$ 面積 $+$ 平行四邊形 $HLCA$ 面積
$=$ 正方形 $BCED$ 面積 $+$ 正方形 $ACFG$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：
   J. M. Richardson (1858). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 1(3), 354.
2. 心得：此題證明的作圖與 G085 相同。但證明過程卻多了一些步驟，先將正方形 $ABKH$ 轉換為六邊形 $ABDKHG$ 與三角形 GAH ，三角形 DKB 的關係，再透過全等圖形的增補，得到正方形 $ABKH$ 面積會等於平行四邊形 $HLCA$ 與平行四邊形 $LKBC$ 的面積和，進而推得勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此題證明也可根據 Pappus 定理，容易地將幾何的證明轉換為代數的證明。