勾股定理證明-G085

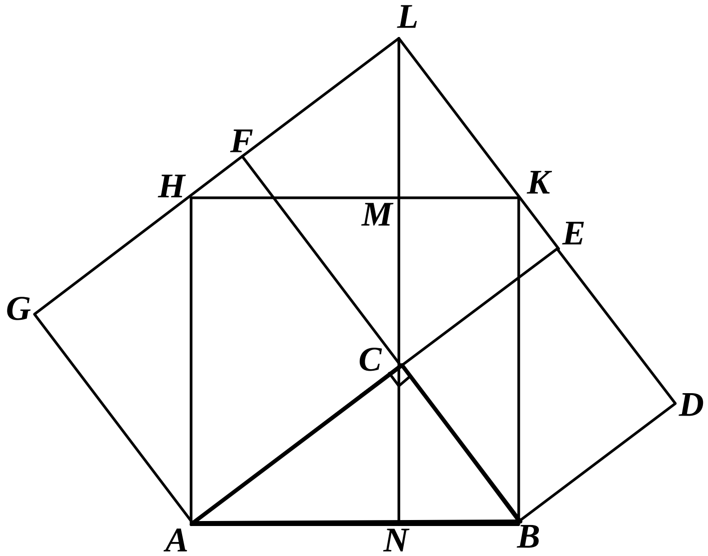
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 分別延長$\overline{GF}$與$\overline{DE}$，使其相交於L點(於證明過程第 2 點說明點K在$\overline{LE}$上)。

3. 連接$\overline{LC}$，使其與$\overline{HK}$交於M點。

4. 延長$\overline{MC}$，使其與$\overline{AB}$交於N點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，推得正方形$ABKH$的面積會等於兩個長方形的面積和，再利用底高的面積計算得到這兩個長方形的面積和會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，再得到點 K 的位置在 $\overline{LE}$ 上：

因為 $\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^\circ-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB\,(\text{SAS 全等}).$$

得到 $\angle BDK=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle EDB=90^\circ$，所以

點 K 在 $\overline{LE}$ 上，即 $L-K-E$ 共線。

3. 證明三角形 LHK 與三角形 CAB 全等：

因為 $\overline{HK}=\overline{AB}$，又由平行關係可得到 $\angle LHK=\angle CAB$ 與 $\angle LKH=\angle CBA$，所以

$$\Delta LHK\cong\Delta CAB\,(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明四邊形 $HLCA$ 與四邊形 $LKBC$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係得知 $\overline{HL}\,//\,\overline{AC}$，又因為 $\Delta LHK\cong\Delta CAB$，所以 $\overline{HL}=\overline{AC}$.

因此

四邊形 $HLCA$ 為平行四邊形.

同理，$\overline{LK}\,//\,\overline{CB}$, $\overline{LK}=\overline{CB}$，故

四邊形 $LKBC$ 為平行四邊形.

5. 證明四邊形 $HMNA$ 與四邊形 $MKBN$ 皆為長方形：

因為四邊形 $HLCA$ 為平行四邊形，所以 $\overline{LC}\,//\,\overline{HA}$，因此 $\overline{LN}\perp\overline{HK}$, $\overline{LN}\perp\overline{AB}$，故

四邊形 $HMNA$ 為長方形.

同理

四邊形 $MKBN$ 為長方形.

6. 找出長方形與正方形的面積關係：

長方形 $MKBN$ 面積 $=\overline{BK}\times\overline{KM}$
＝平行四邊形 $LKBC$ 面積
$=\overline{BC}\times\overline{CE}$
＝正方形 $BCED$ 面積.

且

長方形 $HMNA$ 面積 $=\overline{AH}\times\overline{HM}$
＝平行四邊形 $HLCA$ 面積
$=\overline{AC}\times\overline{CF}$
＝正方形 $ACFG$ 面積.

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$面積＝長方形$MKBN$面積＋長方形$HMNK$面積

＝正方形$BCED$面積＋正方形$ACFG$面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明是一名威徹斯特高中的學生 Joseph Zelson 於 1939 年所證出，同時也記載於：
   (1) J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 13). Leipz.: Friese.
   (2) Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry***(**p.156**)**. New York : Macmillan and co.
   (3) Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 251.
   (4) J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly,* 2(2), 45-52.
2. 心得：此題證明簡單清楚，先將正方形 $ABKH$ 切割為兩個長方形，再透過輔助線將長方形面積轉移為平行四邊形面積的計算，進而推得正方形 $ABKH$ 面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		