勾股定理證明-G084

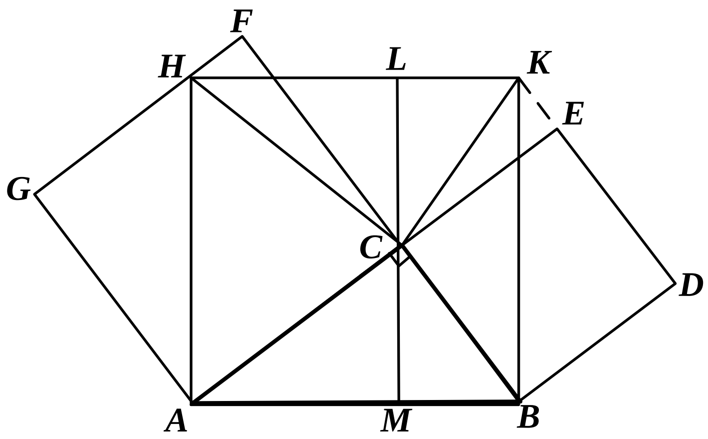
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 連接$\overline{KE}$(於證明過程第 2 點說明$K-E-D$共線)。

3. 過C作$\overline{AB}$之垂線，分別與$\overline{HK}$, $\overline{AB}$交於L點, M點。

4. 連接$\overline{CH}$, $\overline{CK}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先利用正方形$ABKH$的面積會等於兩個長方形的面積和，再找出長方形與三角形的面積關係，最後由底高的面積計算得到這兩個長方形的面積和會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形DKB與三角形CAB全等，再得到$K-E-D$共線：

因為$\overline{KB}=\overline{AB}$，$\overline{BD}=\overline{BC}$，$\angle DBK=90^{\circ}-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle BDK=\angle BCA=90^{\circ}$，又$\angle EDB=90^{\circ}$，所以

$$K-E-D\text{ 共線。}$$

3. 證明四邊形$HLMA$與四邊形$LKBM$皆為長方形：

因為$\overline{LM}\perp\overline{AB}$，所以$\angle LMA=90°$，四邊形$HLMA$的四個內角皆為$90°$，故

四邊形$HLMA$為長方形.

同理

四邊形$LKBM$為長方形.

4. 找出長方形與正方形的面積關係：

$$\begin{aligned}\text{長方形}LKBM\text{ 面積}&=\overline{BK}\times\overline{BM}\\&=2\times\Delta BCK\text{ 面積}\\&=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CE})\\&=\overline{BC}\times\overline{CE}\\&=\text{正方形}BCED\text{ 面積}.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\text{長方形}HLMA\text{ 面積}&=\overline{AH}\times\overline{AM}\\&=2\times\Delta ACH\text{ 面積}\\&=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AG})\\&=\overline{AC}\times\overline{AG}\\&=\text{正方形}ACFG\text{ 面積}.\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\text{長方形}LKBM\text{ 面積}+\text{長方形}HLMA\text{ 面積}\\&=\text{正方形}BCED\text{ 面積}+\text{正方形}ACFG\text{ 面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 383.

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 71). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：此題證明簡單易懂，與 G077 十分相似。先將正方形 $ABKH$ 切割成兩個長方形，再透過輔助線將長方形面積轉移為三角形面積的計算，進而推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 說明：在原書的圖形並沒有畫出 $\overline{KE}$ ，但如果沒有此線段，將很難說明三角形 KBC 的高與正方形 $BCED$ 的邊等長，因此在作圖中畫出 $\overline{KE}$ ，來證明 $K-E-D$ 共線。