勾股定理證明-G083

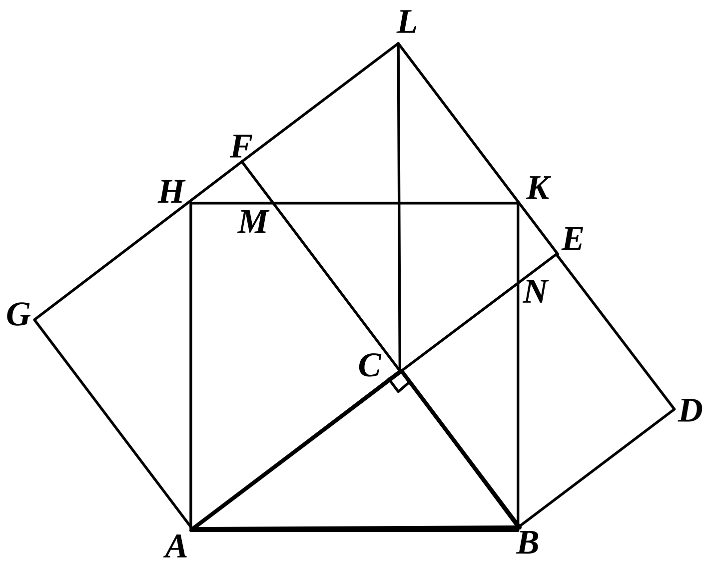
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. $\overline{CF}$與$\overline{HK}$交於M點，$\overline{BK}$與$\overline{CE}$交於N點。

3. 分別延長$\overline{GF}$與$\overline{DE}$，使其相交於L點(於證明過程第 2 點說明點K在$\overline{LE}$上)。

4. 連接$\overline{LC}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，利用正方形$ABKH$的面積會等於五邊形$ABDLG$的面積減去三個三角形的面積，經過全等圖形的增補與移除關係後，得到正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，$\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形DKB與三角形CAB全等，再得到點K的位置在$\overline{LE}$上：

因為$\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^\circ-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle BDK=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle EDB=90^\circ$，所以

點K在$\overline{LE}$上，即$L-K-E$共線。

3. 證明三角形LHK與三角形CAB全等：

因為$\overline{HK}=\overline{AB}$，又由平行關係可得到$\angle LHK=\angle CAB$與$\angle LKH=\angle CBA$，所以

$$\Delta LHK\cong\Delta CAB(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明三角形ELC、三角形FCL、三角形LHK、三角形DKB、三角形GAH皆與三角形CAB全等：

由作圖條件得知四邊形$CELF$為長方形，可得到$\Delta ELC\cong\Delta FCL$，又$\overline{CE}=\overline{BC}$，

$\overline{EL}=\overline{CF}=\overline{CA}$, $\angle CEL=\angle BCA=90^\circ$，所以$\Delta ELC\cong\Delta CAB$(SAS 全等)，因此

$$\Delta ELC\cong\Delta FCL\cong\Delta CAB.$$

綜合結果得到

$$\Delta CAB\cong\Delta ELC\cong\Delta FCL\cong\Delta LHK\cong\Delta DKB\cong\Delta GAH.$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$面積＝五邊形$ABDLG$面積－(ΔGAH面積＋ΔLHK面積＋ΔDKB面積)
＝五邊形$ABDLG$面積－(ΔCAB面積＋ΔELC面積＋ΔFCL面積)
＝正方形$BCED$面積＋正方形$ACFG$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍

The Journal of Education, V. XXVI, 1887, p. 21.

J. M. Richardson (1855). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 2(2), 12.

1. 心得：此題證明的作圖與 G085 相同。先將正方形 *ABKH* 轉換為五邊形 *ABDLG* 與三角形 *GAH*，三角形 *GAH* 以及三角形 *DKB* 的關係，再透過全等三角形的增補，進而推得勾股定理的關係式。
2. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	