勾股定理證明-G082

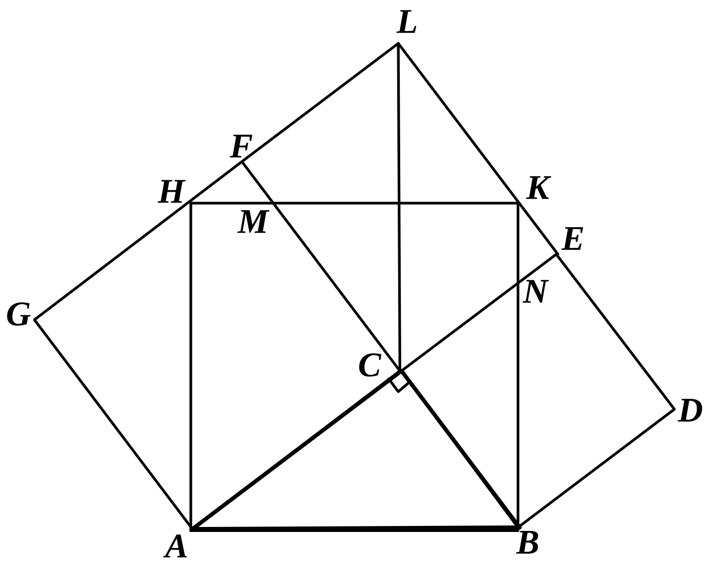
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABKH$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $ACFG$ (於證明過程第 1 點說明點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。

2. $\overline{CF}$ 與 $\overline{HK}$ 交於 M 點，$\overline{BK}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 N 點。

3. 分別延長 $\overline{GF}$ 與 $\overline{DE}$ ，使其相交於 L 點(於證明過程第 2 點說明點 K 在 $\overline{LE}$ 上)。

4. 連接 $\overline{LC}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向上向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於兩個平行四邊形的面積和，再利用底高的面積計算得到這兩個平行四邊形的面積和會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，再得到點 H 的位置在 $\overline{GF}$ 上：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$ ，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle FGA=90^\circ$，所以

$$\text{點} H \text{在} \overline{GF} \text{上，即} G-H-F \text{共線。}$$

2. 先證明三角形DKB與三角形CAB全等，再得到點K的位置在$\overline{LE}$上：

因為$\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^{\circ}-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle BDK=\angle BCA=90^{\circ}$，又$\angle EDB=90^{\circ}$，所以

$$\text{點}K\text{在}\overline{LE}\text{上，即}L-K-E\text{共線。}$$

3. 證明三角形LHK與三角形CAB全等：

因為$\overline{HK}=\overline{AB}$，又由平行關係可得到$\angle LHK=\angle CAB$與$\angle LKH=\angle CBA$，所以

$$\Delta LHK\cong\Delta CAB(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明四邊形$HLCA$與四邊形$LKBC$皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係得知$\overline{HL}//\overline{AC}$，又因為$\Delta LHK\cong\Delta CAB$，所以$\overline{HL}=\overline{AC}$.

因此

$$\text{四邊形}HLCA\text{為平行四邊形.}$$

同理，$\overline{LK}//\overline{CB}$, $\overline{LK}=\overline{CB}$，故

$$\text{四邊形}LKBC\text{為平行四邊形.}$$

5. 找出平行四邊形與正方形的面積關係：

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}LKBC\text{面積}&=\overline{BC}\times\overline{CE}\\&=\text{正方形}BCED\text{面積.}\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}HLCA\text{面積}&=\overline{AC}\times\overline{CF}\\&=\text{正方形}ACFG\text{面積.}\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\text{凹五邊形}ACBKH\text{面積}+\Delta CAB\text{面積}\\&=\text{凹五邊形}ACBKH\text{面積}+\Delta LHK\text{面積}\\&=\text{凹六邊形}ACBKLH\text{面積}\\&=\text{平行四邊形}LKBC\text{面積}+\text{平行四邊形}HLCA\text{面積}\\&=\text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積.}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1901 年 7 月 7 日想到的。之後在以下的書籍中也找到證明：
   - (1) J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 25). Leipz.: Friese.
   - (2) Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 251.
   - (3) Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 55). Amsterdam: A. Versluys.
   - (4) Heath's Mathematical Monographs, No.1, 1900, p. 24, proof IX.
   - (5) Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Dr. Leitzmann, 21.
2. 心得：此題證明並不困難，先將正方形 $ABKH$ 轉換為凹五邊形 $ACBKH$ 與三角形 CAB 的關係，再透過全等圖形的增補，可得到正方形 $ABKH$ 面積會等於平行四邊形 $LKBC$ 與平行四邊形 $HLCA$ 的面積和，進而推得勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：若延長 $\overline{LC}$ ，與 $\overline{AB}$ 交於一點，則可以容易地將此題幾何證明轉換為代數證明。