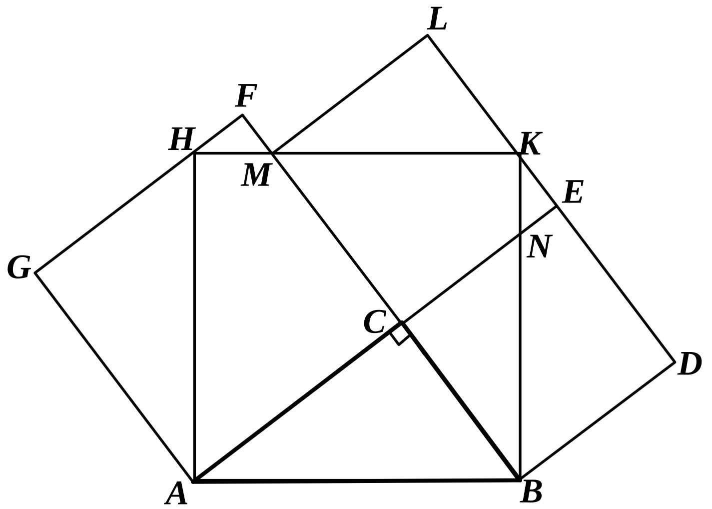
勾股定理證明-G081

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABKH$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $ACFG$ (於證明過程第 1 點說明點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。

2. 延長 $\overline{DE}$，並在 $\overline{DE}$ 的延長線上取一點 L，使得 $\overline{KL}=\overline{CN}$ (於證明過程第 2 點說明 $K-E-D$ 共線)。

3. 連接 $\overline{ML}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的切割重新拼圖的方法後，可得到正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，再得到點 H 的位置在 $\overline{GF}$ 上：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle FGA=90^\circ$，所以

點 H 在 $\overline{GF}$ 上，即 $G-H-F$ 共線。

2. 先證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，再得到 $K-E-D$ 共線：

因為 $\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^\circ-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle BDK = \angle BCA = 90^\circ$，又$\angle BDE = 90^\circ$，所以

$$K - E - D \text{共線。}$$

3. 證明三角形 FHM 與三角形 EKN 全等：

因為$\overline{HF} = \overline{GF} - \overline{GH} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{KD} - \overline{DE} = \overline{KE}$, $\angle HFM = \angle KEN = 90^\circ$，且由作圖的平行關係可知$\angle FMH = \angle LKM = 90^\circ - \angle NKE = \angle ENK$，所以

$$\Delta FHM \cong \Delta EKN \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 證明三角形 LMK 與三角形 CBN 全等：

因為$\Delta FHM \cong \Delta EKN$，所以$\overline{HM} = \overline{NK}$，可得到$\overline{MK} = \overline{HK} - \overline{HM} = \overline{BK} - \overline{NK} = \overline{BN}$，又$\overline{LK} = \overline{CN}$, $\angle CNB = \angle KNE = 90^\circ - \angle NKE = \angle LKM$，所以

$$\Delta LMK \cong \Delta CBN \text{ (SAS 全等)}.$$

5. 說明四邊形 $LDBM$ 為長方形：

因為$\Delta LMK \cong \Delta CBN$，所以$\angle MLK = \angle BCN = 90^\circ$，又$\angle CBD = \angle BDE = 90^\circ$，因此$\angle BML = 360^\circ - 3 \times 90^\circ = 90^\circ$，故

$$\text{四邊形 } LDBM \text{ 為長方形。}$$

6. 說明三角形 MKB 面積與正方形 $BCED$ 面積的關係：

$$\begin{aligned}
\Delta MKB\text{面積} &= \frac{1}{2} \times \text{長方形}LDBM\text{面積} \\
&= \Delta DKB\text{面積} + \Delta LMK\text{面積} \\
&= (\Delta EKN\text{面積} + \text{四邊形}NEDB\text{面積}) + \Delta CBN\text{面積} \\
&= \Delta FHM\text{面積} + (\text{四邊形}NEDB\text{面積} + \Delta CBN\text{面積}) \\
&= \Delta FHM\text{面積} + \text{正方形}BCED\text{面積}.
\end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{四邊形}HMCA\text{面積} + \Delta CAB\text{面積} + \Delta MKB\text{面積} \\
&= \text{四邊形}HMCA\text{面積} + \Delta GAH\text{面積} + (\Delta FHM\text{面積} + \text{正方形}BCED\text{面積}) \\
&= (\text{四邊形}HMCA\text{面積} + \Delta GAH\text{面積} + \Delta FHM\text{面積}) + \text{正方形}BCED\text{面積} \\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積} + \text{正方形}BCED\text{面積}.
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.158). New York : Macmillan and co.

2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 ABC 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，再證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，三角形 FHM 與三角形 EKN 全等，三角形 LMK 與三角形 CBN 全等。進而透過平移與旋轉的拼圖方法推得正方形 $ABKH$ 面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。

   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		