勾股定理證明-G080

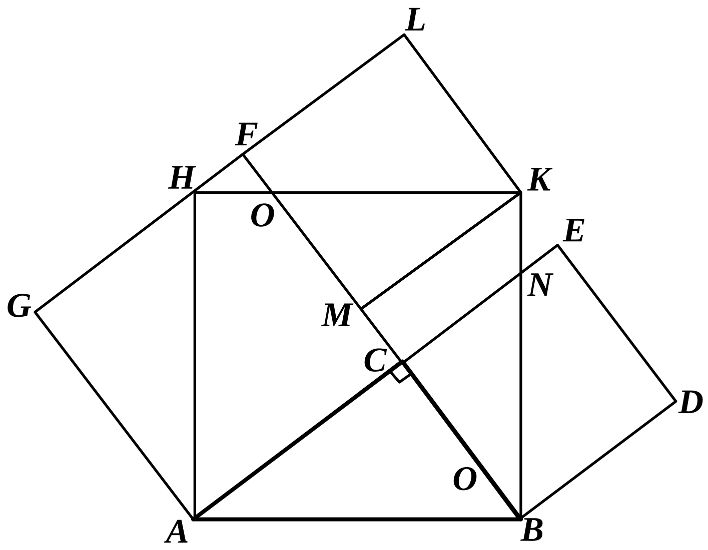
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 延長$\overline{GF}$，並在$\overline{GF}$的延長線上取一點L，使得$\overline{FL}=\overline{BC}$。

3. 過K作$\overline{KM}\ //\ \overline{AC}$，與$\overline{CO}$交於$M$點。

4. 連接$\overline{LK}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的切割重新拼圖的方法後，可得到正方形$ABKH$的面積會等於正方形$ACFG$與正方形$BCED$的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 證明三角形 LHK 與三角形 GAH 全等：

因為 $\Delta GAH \cong \Delta CAB$，所以 $\overline{HG} = \overline{BC}$，則 $\overline{HL} = \overline{HF} + \overline{FL} = \overline{HF} + \overline{BC} = \overline{HF} + \overline{HG} = \overline{GF}$ ，

又 $\overline{HK} = \overline{AH}$, $\angle LHK = 90^{\circ} - \angle GHA = \angle GAH$ ，所以

$$\Delta LHK \cong \Delta GAH \text{ (SAS 全等)}.$$

可得到

$$\Delta LHK \cong \Delta GAH \cong \Delta CAB.$$

3. 證明四邊形 $FLKM$ 為正方形：

因為 $\Delta LHK \cong \Delta CAB$ ，所以 $\angle HLK = \angle ACB = 90°$, $\overline{LK} = \overline{BC}$.

由作圖的平行關係可知 $\angle MFL = \angle FMK = \angle MKL = 90°$ ，且 $\overline{FL} = \overline{BC} = \overline{LK}$ ，

因此

四邊形 $FLKM$ 為正方形，且面積與正方形 $BCED$ 相等。

4. 證明三角形 MBK 與三角形 LHK 全等：

因為四邊形 $FLKM$ 為正方形，所以 $\overline{MK} = \overline{LK}$ ，且 $\angle BMK = \angle HLK = 90°$, $\overline{BK} = \overline{HK}$ ，

因此

$$\Delta MBK \cong \Delta LHK \text{ (RHS 全等)}.$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$ 面積＝四邊形$ACOH$ 面積＋ΔCAB面積＋ΔMBK面積＋ΔMKO面積
＝四邊形$ACLH$ 面積＋ΔGAH面積＋ΔLHK面積＋ΔMKO面積
＝正方形$ACFG$面積＋正方形$FLKM$ 面積
＝正方形$ACFG$面積＋正方形$BCED$面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 251.
2. 心得：此題證明的關鍵在於證明三角形 MBK 與三角形 LHK 全等，以及正方形 $FLKM$ 與正方形 $BCED$ 的面積相等，進一步透過圖形的切割與平移，推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	