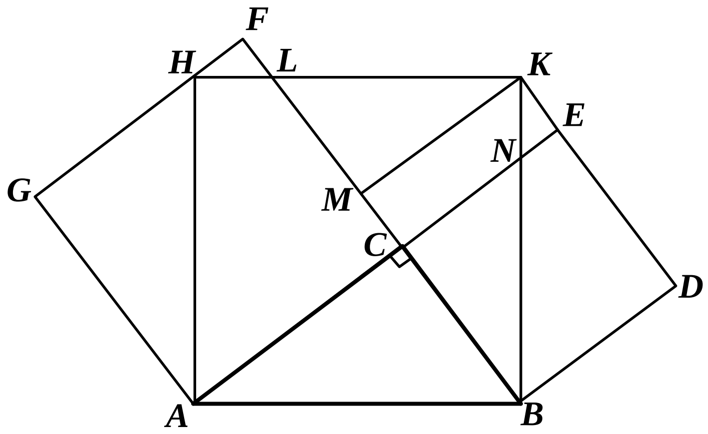
勾股定理證明-G079

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABKH$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $ACFG$ (於證明過程第 1 點說明點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。

2. 過 K 作 $\overline{LC}$ 之垂線，與 $\overline{LC}$ 交於 M 點。

3. 連接 $\overline{KE}$ (於證明過程第 2 點說明 $K-E-D$ 共線)。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向內向外作正方形，先證明圖中的三角形全等，再經過全等圖形的切割重新拼圖的方法後，可得到正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，再得到點 H 的位置在 $\overline{GF}$ 上：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle FGA=90^\circ$，所以

點 H 在 $\overline{GF}$ 上，即 $G-H-F$ 共線。

2. 先證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，再得到 $K-E-D$ 共線：

因為 $\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^\circ-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle BDK = \angle BCA = 90^{\circ}$，又$\angle BDE = 90^{\circ}$，所以

$$K - E - D \text{ 共線。}$$

3. 證明三角形MBK與三角形DKB全等：

因為$\overline{BK} = \overline{BK}$，且由作圖的平行關係可知$\angle BMK = \angle KDB = 90^{\circ}$, $\angle MBK = \angle DKB$，所以

$$\Delta MBK \cong \Delta DKB \text{ (AAS 全等).}$$

4. 證明三角形KNE與三角形HLF全等：

因為$\overline{KE} = \overline{KD} - \overline{ED} = \overline{GF} - \overline{GH} = \overline{HF}$，且由作圖的平行關係可知$\angle KEN = \angle HFL = 90^{\circ}$,

$\angle NKE = 90° - \angle MKN = \angle LKM = \angle LHF$，所以

$$\Delta KNE \cong \Delta HLF \text{ (ASA 全等).}$$

5. 證明三角形CBN與三角形MKL全等：

因為$\overline{BN} = \overline{BK} - \overline{KN} = \overline{HK} - \overline{HL} = \overline{LK}$, $\angle NCB = \angle LMK = 90^{\circ}$，且

$\angle CBN = 90° - \angle MKN = \angle MKL$，所以

$$\Delta CBN \cong \Delta MKL \text{ (AAS 全等).}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$面積＝四邊形$ACLH$面積＋ΔCAB面積＋ΔMBK面積＋ΔMKL面積
＝四邊形$ACLH$面積＋ΔGAH面積＋ΔDKB面積＋ΔCBN面積
＝四邊形$ACLH$面積＋ΔGAH面積＋(ΔKNE面積＋四邊形$BDEN$面積)
＋ΔCBN面積
＝(四邊形$ACLH$面積＋ΔGAH面積＋ΔHLF面積)＋(四邊形$BDEN$面積
＋ΔCBN面積)
＝正方形$ACFG$面積＋正方形$BCED$面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 36). Amsterdam: A. Versluys.

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.161). New York : Macmillan and co.

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 251.

2. 心得：此題證明的作圖並不困難，而證明的關鍵在於證明三角形 MBK 與三角形 DKB 全等，三角形 KNE 與三角形 HLF 全等，以及三角形 CBN 與三角形 MKL 全等，進一步透過圖形的切割與平移，推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在原書中所繪的圖形有線段 $\overline{OP}$，但證明過程中並沒有用到，因此省略未畫。