勾股定理證明-G078

【作輔助圖】

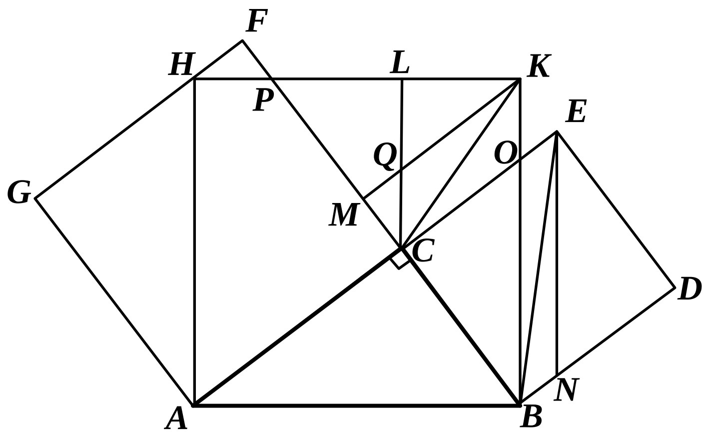
1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABKH$ ，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $BCED$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $ACFG$ (於證明過程第 1 點說明點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。

2. 過 K 作 $\overline{PC}$ 之垂線，與 $\overline{PC}$ 交於 M 點。

3. 過 C 作 $\overline{HK}$ 之垂線，分別與 $\overline{HK}$，$\overline{MK}$ 兩交於 L 點，Q 點。

4. 過 E 作 $\overline{KB}$ 之平行線，與 $\overline{BD}$ 交於 N 點。

5. 連接 $\overline{KC}$，$\overline{EB}$ 。



【求證過程】

先證明四邊形 $ABKH$ 為正方形，並利用圖中三角形的全等關係，及運用底高的面積計算與切割重新拼圖的方法，證明正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，進而推得勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，再得到點 H 的位置在 $\overline{GF}$ 上：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$，$\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$ ，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又 $\angle FGA=90^\circ$，所以

$$\text{點 } H \text{ 在 } \overline{GF} \text{ 上，即 } G-H-F \text{ 共線。}$$

2. 證明三角形MBK與三角形CAB全等：

因為$\angle CBA = 90^\circ - \angle MBK = \angle MKB$，且$\overline{AB} = \overline{BK}$, $\angle BMK = \angle ACB = 90^\circ$，所以

$$\Delta MBK \cong \Delta CAB\,(\text{AAS 全等}),$$

故

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \cong \Delta MBK\,.$$

3. 證明三角形HFP與三角形CMQ全等：

在ΔHFP和ΔCMQ中，因為$\angle HFP = \angle CMQ = 90^\circ$, $\angle HPF + \angle PHF = \angle MCQ + \angle CPL = 90^\circ$, $\angle CPL = \angle HPF$ (對頂角相等)，所以$\angle PHF = \angle MCQ$.

且$\overline{HF} = \overline{GF} - \overline{GH} = \overline{AC} - \overline{GH}$, 又$\overline{AC} = \overline{BM}$, $\overline{GH} = \overline{BC}$，所以$\overline{HF} = \overline{BM} - \overline{BC} = \overline{CM}$.

故

$$\Delta HFP \cong \Delta CMQ\,(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明三角形NDE與三角形PMK全等：

在ΔNDE和ΔPMK中，因為$\overline{DE} = \overline{CE} = \overline{MK}$, $\angle D = \angle PMK = 90^\circ$, $\angle ABK = \angle PBD = 90^\circ$，

所以$\angle ABC + \angle PBK = \angle PBK + \angle KBD$, $\angle ABC = \angle KBD$.

又因為$\overline{HK} \,//\, \overline{AB}$, $\overline{EN} \,//\, \overline{KB}$, $\angle MPK = \angle ABC$ (內錯角相等), $\angle END = \angle KBD$(同位角相等),

所以$\angle MPK = \angle END$.

故

$$\Delta NDE \cong \Delta PMK\,(\text{AAS 全等}).$$

5. 證明平行四邊形$OENB$面積等於平行四邊形$QKOC$面積：

因為ΔBCE面積= ΔBCK面積(同底等高)，

所以ΔBCO面積+ ΔBOE面積= ΔBCO面積+ ΔKCO面積，即

$$\Delta BOE\text{ 面積} = \Delta KCO\text{ 面積}.$$

又平行四邊形$OENB$面積= $2\times\Delta BOE$面積，平行四邊形$QKOC$面積= $2\times\Delta KCO$面積，

故

$$\text{平行四邊形}OENB\text{面積} = \text{平行四邊形}QKOC\text{面積}.$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{ 面積} &= \Delta CAB\text{ 面積} + \text{四邊形}HACP\text{ 面積} + \Delta CMQ\text{ 面積} \\
&\quad + \Delta PMK\text{ 面積} + \text{平行四邊形}QKOC\text{ 面積} + \Delta COB\text{ 面積} \\
&= (\Delta GAH\text{ 面積} + \text{四邊形}HACP\text{ 面積} + \Delta HFP\text{ 面積} \\
&\quad + (\Delta NDE\text{ 面積} + \text{平行四邊形}OENB\text{ 面積} + \Delta COB\text{ 面積}) \\
&= \text{正方形}ACFG\text{ 面積} + \text{正方形}BCED\text{ 面積}.
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(11), 250.

   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 382

2. 心得：此題證明的關鍵在於證明三角形 HFP 與三角形 CMQ 全等，三角形 NDE 與三角形 PMK 全等，以及平行四邊形 $OENB$ 與平行四邊形 $QKOC$ 的面積相等。進而透過平移與旋轉的拼圖方法推得正方形 $ABKH$ 面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。

   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	