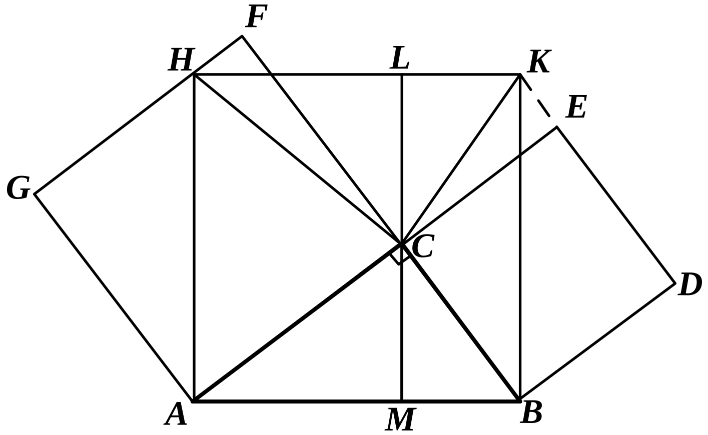
勾股定理證明-G077

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABKH$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$BCED$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$ACFG$(於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 過C作$\overline{AB}$之垂線，分別與$\overline{HK}$, $\overline{AB}$相交於L點, M點。

3. 連接$\overline{CH}$, $\overline{CK}$, $\overline{KE}$ (於證明過程第 2 點說明$K-E-D$共線)。



【求證過程】

先證明四邊形$ABKH$為正方形，並將正方形$ABKH$縱向切割為兩個長方形，再運用底高的面積計算與切割重新拼圖的方法，證明這兩個長方形的面積和會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，進而推得勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形DKB與三角形CAB全等，再得到$K-E-D$共線：

因為$\overline{KB}=\overline{AB}$, $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\angle DBK=90^\circ-\angle NBC=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle BDK = \angle BCA = 90^{\circ}$，又 $\angle BDE = 90^{\circ}$，所以

$$K - E - D \text{ 共線。}$$

3. 先證明四邊形 $LKBM$ 為長方形，再證明它的面積等於正方形 $BCED$ 面積：
因為四個內角皆為直角，所以四邊形 $LKBM$ 為長方形，且

$$\begin{aligned}
\text{長方形}LKBM\text{ 面積} &= \overline{KB} \times \overline{BM} \\
&= 2 \times \Delta KBC\text{面積} \\
&= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CE} \\
&= \overline{BC} \times \overline{CE} \\
&= \overline{BC}^2 \\
&= \text{正方形}BCED\text{面積.}
\end{aligned}$$

4. 先證明四邊形 $HLMA$ 為長方形，再證明它的面積等於正方形 $ACFG$ 面積：
因為四個內角皆為直角，所以四邊形 $HLMA$ 為長方形，且

$$\begin{aligned}
\text{長方形}HLMA\text{面積} &= \overline{HA} \times \overline{AM} \\
&= 2 \times \Delta HAC\text{面積} \\
&= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AG} \\
&= \overline{AC} \times \overline{AG} \\
&= \overline{AC}^2 \\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積.}
\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{ 面積} &= \text{長方形}LKBM\text{ 面積} + \text{長方形}HLMA\text{面積} \\
&= \text{正方形}BCED\text{ 面積} + \text{正方形}ACFG\text{ 面積.}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

(1) J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 12). Leipz.: Friese.

(2) Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.159). New York : Macmillan and co.

(3) Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 250.
(4) Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 12). Amsterdam: A. Versluys.
(5) E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 76). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：此題證明簡單易懂，先將正方形 $ABKH$ 切割成兩個長方形，再透過輔助線將長方形面積轉移為三角形面積的計算，進而推得正方形 $ABKH$ 的面積會等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：在原書的圖形並沒有畫出 $\overline{KE}$ ，但如果沒有此線段，將很難說明三角形 KBC 的高與正方形 $BCED$ 的邊長相等，因此在作圖中畫出 $\overline{KE}$ ，來證明 $K-E-D$ 共線。