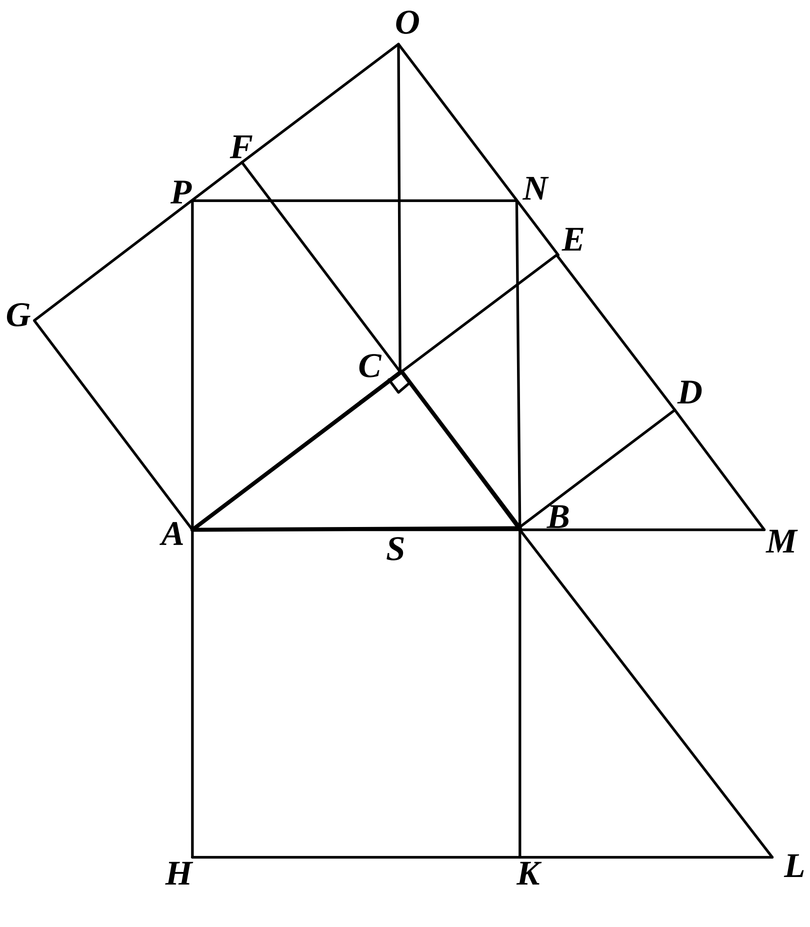
勾股定理證明-G065

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$。
2. 延長 $\overline{DE}$ 和 $\overline{GF}$，使得直線 DE 和直線 GF 相交於 O 點。
3. 延長 $\overline{CB}$ 和 $\overline{HK}$，使得直線 CB 和直線 HK 相交於 L 點。
4. 延長 $\overline{ED}$ 和 $\overline{AB}$，使得直線 ED 和直線 AB 相交於 M 點。
5. 延長 $\overline{HA}$，$\overline{KB}$，分別與 $\overline{GF}$，$\overline{OE}$ 相交於 P 點，N 點。
6. 過 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 S 點。
7. 連接 $\overline{PN}$，$\overline{OC}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，利用輔助線將圖形延伸，並利用切割與推移等過程，重新找出面積的關係，最後推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 APG 與三角形 ABC 全等，推得 $\overline{GP}=\overline{FO}$：

   因為 $\angle GAP=90^{\circ}-\angle PAC=\angle CAB$，且 $\overline{AG}=\overline{AC},\ \ \angle AGP=\angle ACB=90^{\circ}$，所以

   $$\Delta APG\cong\Delta ABC\ (\text{ASA 全等}).$$

   得到

   $$\overline{GP}=\overline{CB}=\overline{CE}=\overline{FO}.$$

2. 先證明三角形 APG 與三角形 COF 全等，推得 $\overline{OC}\,//\,\overline{PA}$：

   因為 $\overline{GP}=\overline{FO}$，又 $\overline{GA}=\overline{FC}$ 且 $\angle AGP=\angle CFO=90^{\circ}$，所以

   $$\Delta APG\cong\Delta COF\ (\text{SAS 全等}).$$

   得到 $\angle GPA=\angle FOC$，因此

   $$\overline{OC}\,//\,\overline{PA}\ (\text{同位角相等}).$$

3. 先說明四邊形 $ACOP$，$CBMN$ 皆為平行四邊形，進一步得到平行四邊形 $ACOP$ 面積等於正方形 $ACFG$ 面積，平行四邊形 $CBMN$ 面積等於正方形 $BCED$ 面積：

   由平行關係可知 $\overline{PO}\,//\,\overline{AC}$，又因為 $\overline{OC}\,//\,\overline{PA}$，所以四邊形 $ACOP$ 為平行四邊形。且

   $$\begin{aligned}\text{平行四邊形}ACOP\text{面積}&=\overline{AC}\times\overline{CF}\\&=\text{正方形}ACFG\text{面積}.\end{aligned}$$

   同理可證四邊形 $CBMN$ 為平行四邊形，且

   $$\begin{aligned}\text{平行四邊形}CBMN\text{面積}&=\overline{CB}\times\overline{BD}\\&=\text{正方形}BCED\text{面積}.\end{aligned}$$

4. 證明三角形 PNO 與三角形 ABC 全等：

   因為四邊形 $ACOP$，$CBMN$ 皆為平行四邊形，所以 $\overline{PO}=\overline{AC},\ \overline{ON}=\overline{CB}$，又 $\angle PON=\angle ACB=90^{\circ}$，因此

   $$\Delta PNO\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

5. 證明四邊形 $ABNP$ 面積等於凹六邊形 $ACBNOP$ 面積：

$$
\begin{aligned}
\text{四邊形}ABNP\text{面積} &= \text{凹五邊形}ACBNP\text{面積}+\Delta ACB\text{面積}\\
&= \text{凹五邊形}ACBNP\text{面積}+\Delta PNO\text{面積}\\
&= \text{六邊形}ACBNOP\text{面積}
\end{aligned}
$$

6. 證明三角形 NBM 與三角形 BKL 全等：

因為 $\Delta COF \cong \Delta APG \cong \Delta ABC$ ，且四邊形 $CBMN$ 皆為平行四邊形，所以

$\overline{NB}=\overline{OC}=\overline{AP}=\overline{AB}=\overline{BK}$ ，又由作圖的平行關係可知 $\angle NMB=\angle BLK$,

$\angle NBM=\angle BKL=90°$ ，因此

$$\Delta NBM \cong \Delta BKL \text{ (AAS 全等).}$$

7. 證明梯形 $PNMA$ 與梯形 $ABLH$ 的面積相等：

因為 $\overline{NB}\,//\,\overline{PA}$ 且 $\overline{NB}=\overline{PA}$ ，所以四邊形 $ABNP$ 為平行四邊形，得到 $\overline{PN}\,//\,\overline{AB}$ 。又因為

$\Delta PNO \cong \Delta APG \cong \Delta ABC$, $\Delta NBM \cong \Delta BKL$ ，所以 $\overline{PN}=\overline{AB}$, $\overline{PA}=\overline{AB}=\overline{AH}$,

$\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{BM}=\overline{HK}+\overline{KL}=\overline{HL}$ ，因此

$$\text{梯形}PNMA\text{面積}=\text{梯形}ABLH\text{面積}.$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{梯形}ABLH\text{面積}-\Delta BKL\text{面積}\\
&= \text{梯形}PNMA\text{面積}-\Delta NBM\text{面積}\\
&= \text{四邊形}ABNP\text{面積}\\
&= \text{六邊形}ACBNOP\text{面積}\\
&= \text{平行四邊形}CBNO\text{面積}+\text{平行四邊形}ACOP\text{面積}\\
&= \text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積}.
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 7 月 7 日想到的。並在以下的書籍中受到啓發：

   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 31). Leipz.: Friese.

2. 心得：此題證明的關鍵在於證明四邊形 $ACOP$ ， $CBNO$ 皆為平行四邊形，以及梯形 $PNMA$ 與梯形 $ABLH$ 的面積相等，再利用全等圖形的面積增補關係，推得正方形 $ABKH$ 面積等於平行四邊形 $ACOP$ 與平行四邊形 $CBNO$ 的面積和，進一步得到勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		