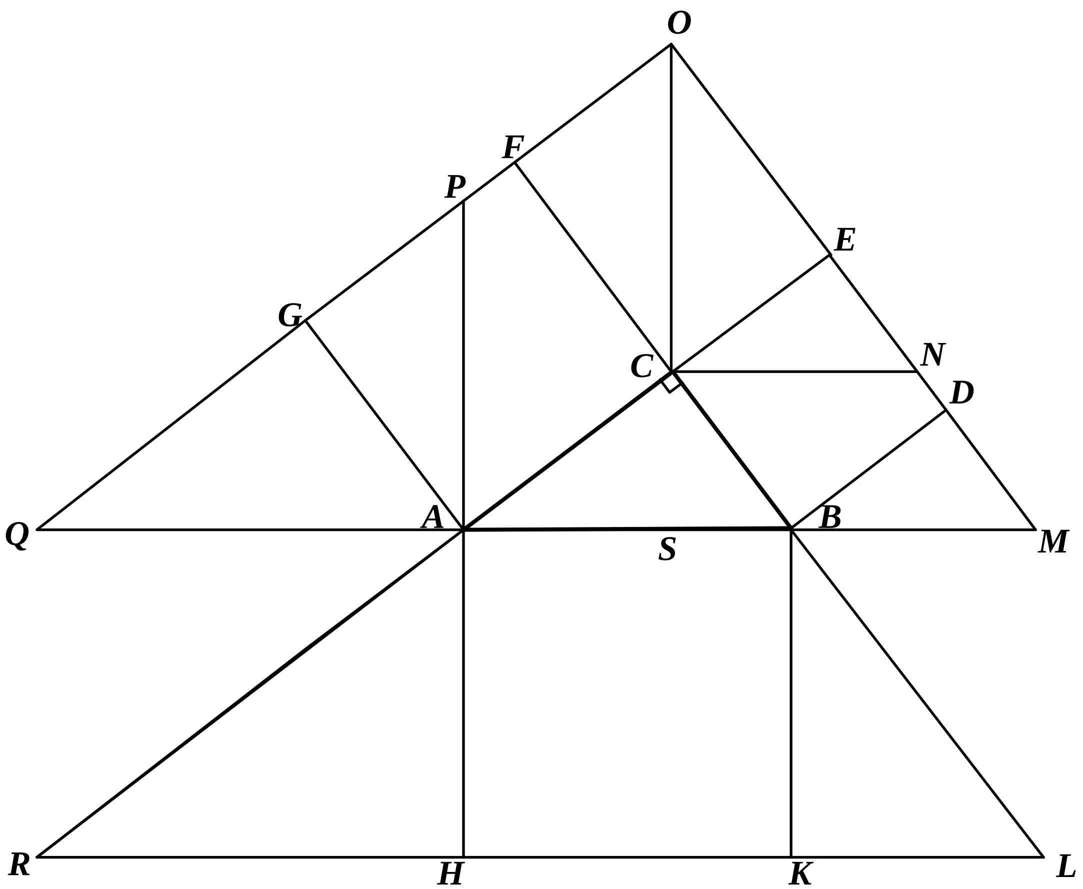
勾股定理證明-G064

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形ABC的$\overline{AC}$，$\overline{BC}$和$\overline{AB}$為邊長，向外作正方形$ACFG$，正方形$BCED$和正方形$ABKH$。
2. 延長$\overline{DE}$和$\overline{GF}$，使得直線DE和直線GF相交於O點。
3. 延長$\overline{FG}$和$\overline{ED}$，使其分別與直線AB交於Q點，M點。
4. 延長$\overline{CA}$和$\overline{CB}$，使其分別與直線HK交於R點，L點。
5. 延長$\overline{HA}$，交$\overline{GF}$於P點。
6. 過C點作$\overline{AB}$的平行線，交$\overline{DE}$於N點。
7. 連接$\overline{OC}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，利用輔助線將圖形延伸，並利用切割與推移等過程，重新找出面積的關係，最後推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形APG與三角形ABC全等，推得$\overline{GP}=\overline{FO}$：

   因為$\angle GAP=90^{\circ}-\angle PAC=\angle CAB$，且$\overline{AG}=\overline{AC},\ \ \angle AGP=\angle ACB=90^{\circ}$，所以

   $$\Delta APG\cong\Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

   得到

   $$\overline{GP}=\overline{CB}=\overline{CE}=\overline{FO}.$$

2. 先證明三角形APG與三角形COF全等，推得$\overline{OC}\,//\,\overline{PA}$：

   因為$\overline{GP}=\overline{FO}$，又$\overline{GA}=\overline{FC}$且$\angle AGP=\angle CFO=90^{\circ}$，所以

   $$\Delta APG\cong\Delta COF \text{ (SAS 全等)}.$$

   得到$\angle GPA=\angle FOC$，因此

   $$\overline{OC}\,//\,\overline{PA} \text{ (同位角相等)}.$$

3. 先說明四邊形$ACOP$，$CBMN$皆為平行四邊形，進一步得到平行四邊形$ACOP$面積等於正方形$ACFG$面積，平行四邊形$CBMN$面積等於正方形$BCED$面積：

   由平行關係可知$\overline{PO}\,//\,\overline{AC}$，又因為$\overline{OC}\,//\,\overline{PA}$，所以四邊形$ACOP$為平行四邊形。且

   $$\begin{aligned}\text{平行四邊形}ACOP\text{面積}&=\overline{AC}\times\overline{CF}\\&=\text{正方形}ACFG\text{面積}.\end{aligned}$$

   同理可證四邊形$CBMN$為平行四邊形，且

   $$\begin{aligned}\text{平行四邊形}CBMN\text{面積}&=\overline{CB}\times\overline{BD}\\&=\text{正方形}BCED\text{面積}.\end{aligned}$$

4. 證明三角形QPA與三角形RAH全等：

   因為$\Delta APG\cong\Delta ABC$，所以$\overline{AP}=\overline{AB}=\overline{HA}$，且由作圖的平行關係可知$\angle QPA=\angle RAH$，$\angle QAP=\angle RHA=90^{\circ}$，因此

   $$\Delta QPA\cong\Delta RAH \text{ (ASA 全等)}.$$

5. 證明三角形OCN與三角形BKL全等：

   因為$\Delta COF\cong\Delta APG\cong\Delta ABC$，所以$\overline{OC}=\overline{AB}=\overline{BK}$，且由作圖的平行關係可知

$\angle ONC = \angle NMB = \angle BLK$, $\angle OCN = \angle BKL = 90°$，所以

$$\Delta OCN \cong \Delta BKL \text{ (AAS 全等)}.$$

6. 證明三角形 QOM 與三角形 RCL 全等：

因為 $\Delta QPA \cong \Delta RAH$, $\Delta OCN \cong \Delta BKL$，所以 $\overline{QA} = \overline{RH}$, $\overline{CN} = \overline{KL}$，因此

$$\overline{QM} = \overline{QA} + \overline{AB} = \overline{RH} + \overline{HK} = \overline{RL}.$$

又因為 $\angle PQA = \angle ARH$, $\angle QOM = \angle RCL = 90°$，故

$$\Delta QOM \cong \Delta RCL \text{ (AAS 全等)}.$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形 $ABKH$ 面積＝ΔRCL 面積－(ΔRAH 面積＋ΔBKL 面積＋ΔACB 面積)
＝ΔQOM 面積－(ΔQPA 面積＋ΔOCN 面積＋ΔACB 面積)
＝平行四邊形 $CBMN$ 面積＋平行四邊形 $ACOP$ 面積
＝正方形 $BCED$ 面積＋正方形 $ACFG$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 30). Leipz.: Friese.

E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 82). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：此題證明的關鍵在於證明四邊形 $ACOP$，$CBMN$ 皆為平行四邊形，以及三角形 QOM 與三角形 RCL 全等，再利用全等圖形的面積增補關係，推得正方形 $ABKH$ 面積等於平行四邊形 $ACOP$ 與平行四邊形 $CBMN$ 的面積和，進一步得到勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		