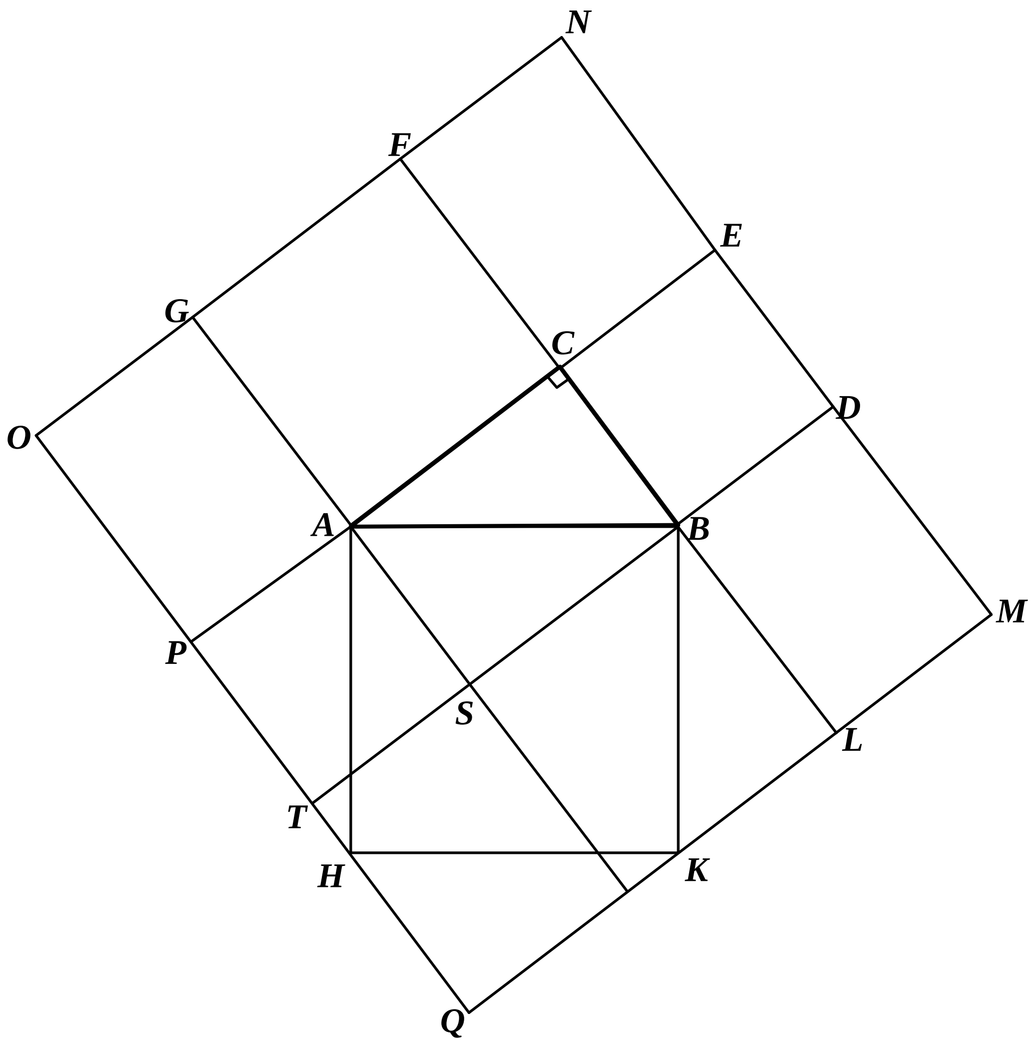
勾股定理證明-G063

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$， $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 延長 $\overline{DE}$ 和 $\overline{FG}$ ，使得直線 DE 與直線 FG 相交於 N 點。
3. 過 K 作一直線平行 $\overline{FG}$ ，與直線 DE 相交於 M 點。
4. 過 H 作一直線平行 $\overline{DE}$ ，與直線 FG 相交於 O 點，與直線 MK 相交於 Q 點。
5. 分別延長 $\overline{FB}$ 和 $\overline{GA}$，使其分別與 $\overline{MQ}$ 相交於 L 點， R 點。
6. 延長 $\overline{EA}$ ，與 $\overline{OQ}$ 相交於 P 點，延長 $\overline{DB}$ ，使其分別與 $\overline{AR}$， $\overline{PQ}$ 相交於 S 點， T 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，利用正方形 $ABKH$ 面積會等於正方形 $CPQL$ 面積減去 4 個 ΔABC 面積，而推導出正方形 $ABKH$ 面積會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 HAP，三角形 BKL，三角形 KHQ 與三角形 ABC 全等：

因為 $\angle HAP = 90° - \angle CAB = \angle ABC$，且 $\overline{AB} = \overline{AH},\ \ \angle ACB = \angle APH = 90°$，所以

$$\Delta HAP \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

同理可證

$$\Delta BKL \cong \Delta ABC,\ \ \Delta KHQ \cong \Delta ABC.$$

綜合以上結果可得

$$\Delta HAP \cong \Delta BKL \cong \Delta KHQ \cong \Delta ABC.$$

2. 證明四邊形 $CPQL$, 四邊形 $ASTP$, 四邊形 $BLRS$ 為正方形：

由作圖的平行關係可知四邊形 $CPQL$ 的四個內角皆為直角，所以四邊形 $CPQL$ 為長方形，又因為 $\Delta BKL \cong \Delta ABC,\ \ \Delta KHQ \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{AP} = \overline{BC},\ \ \overline{BL} = \overline{AC}$，故

$$\overline{CP} = \overline{CA} + \overline{AP} = \overline{BL} + \overline{BC} = \overline{CL}.$$

因此

$$\text{四邊形 } CPQL \text{ 為正方形.}$$

同理可證

$$\text{四邊形 } ASTP \text{，四邊形 } BLRS \text{ 亦為正方形.}$$

3. 由邊長相等關係，可得到：

$$\text{正方形} ASTP \text{ 面積} = \text{正方形} BCED \text{ 面積},$$
$$\text{正方形} BLRS \text{ 面積} = \text{正方形} ACFG \text{ 面積}.$$

4. 由作圖的平行關係可得到：

四邊形 $ACBS$, $SRQT$ 皆為長方形，且

$$\text{長方形} ACBS \text{ 面積} = \overline{BC} \times \overline{AC} = 2 \times \Delta ABC \text{ 面積}.$$

又 $\overline{TS} = \overline{AS} = \overline{BC},\ \ \overline{SR} = \overline{BS} = \overline{AC}$，因此

$$\text{長方形} SRQT \text{ 面積} = \overline{TS} \times \overline{SR} = \overline{BC} \times \overline{AC} = 2 \times \Delta ABC \text{ 面積}.$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形} CLQP \text{ 面積} &= \text{正方形} ABKH \text{ 面積} + \Delta ABC \text{ 面積} + \Delta APH \text{ 面積} + \Delta KHQ \text{ 面積} \\ &\quad + \Delta BKL \text{ 面積} \\ &= \text{正方形} ABKH \text{ 面積} + 4 \times \Delta ABC \text{ 面積}.\end{aligned}$$

且

正方形$CLQP$面積＝長方形$PARQ$面積＋長方形$ACLR$面積

＝(正方形$ASTP$面積＋長方形$SRQT$面積)＋

(正方形$BLRS$面積＋長方形$ACBS$面積)

＝正方形$BCED$面積$+2\times\Delta ABC$面積＋正方形$ACFG$$+2\times\Delta ABC$面積

＝正方形$BCED$面積＋正方形$ACFG$面積$+4\times\Delta ABC$面積.

因此

正方形$ABKH$面積$+4\times\Delta CAB$面積＝正方形$BCED$面積＋正方形$ACFG$面積$+4\times\Delta CAB$面積.

正方形$ABKH$面積＝正方形$BCED$面積＋正方形$ACFG$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 14). Leipz.: Friese.

Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Dr. Leitzmann, 13.

2. 心得：此題證明的作圖十分特別，輔助線皆分別與三角形 ABC 的邊平行。而證明的關鍵在於證明正方形$CLQP$邊上的四個三角形皆全等，再透過面積相等的代數運算就能推得出正方形 $ABKH$ 面積等於正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積和。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		