勾股定理證明-G062

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形ABC的$\overline{AC}$，$\overline{BC}$和$\overline{AB}$為邊長，向外作正方形$ACFG$,正方形$BCED$和正方形$ABKH$ 。

2. 以$\overline{AC}$為邊長，向內作正方形$ACUN$，且$\overline{NU}$交$\overline{BK}$於R點。

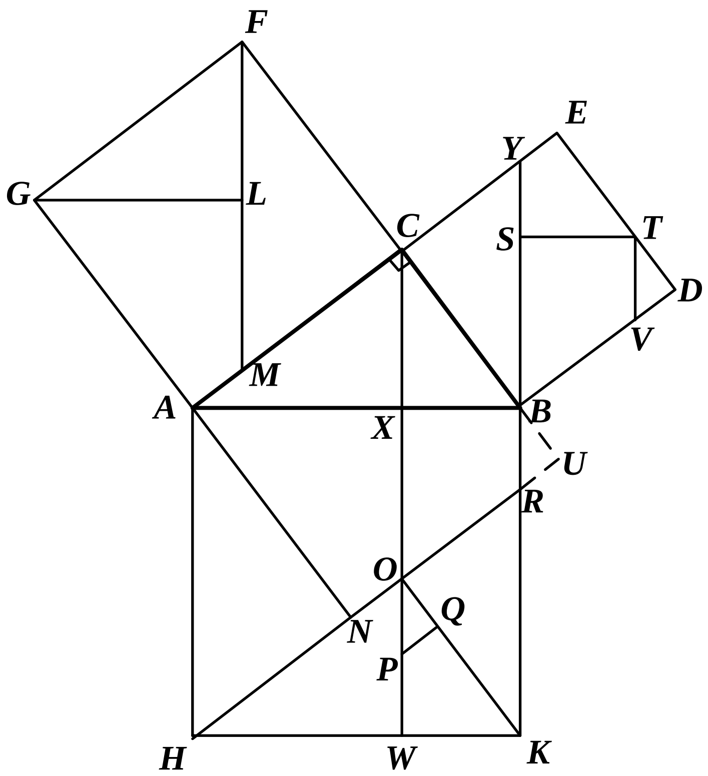
3. 過C作$\overline{HK}$的垂線，分別與$\overline{AB}$，$\overline{NU}$，$\overline{HK}$相交於X，O，W 。

4. 連接$\overline{HN}$，$\overline{KO}$ 。

5. 分別作$\overline{BY}//\overline{CX}$，$\overline{FM}//\overline{CX}$，$\overline{GL}//\overline{AB}$ 。

6. 先在$\overline{OW}$上取$\overline{OP}=\overline{BR}$，再作$\overline{PQ}\perp\overline{OK}$ 。

7. 先在$\overline{BD}$上取$\overline{DV}=\overline{UR}$，作$\overline{VT}//\overline{YB}$，交$\overline{DE}$於$T$，再作$\overline{TS}//\overline{AB}$，交$\overline{YB}$於$S$ 。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，利用經過全等圖形的增補與移除關係，來說明正方形$ABKH$的面積會等於正方形$BCED$與正方形$ACFG$的面積和，

推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 ANH 與三角形 ACB 全等，得到 $H-N-U$ 三點共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB},\ \ \overline{AN}=\overline{AC}$ ，且 $\angle HAN=90^{\circ}-\angle NAB=\angle BAC$ ，所以

$$\Delta ANH\cong\Delta ACB(\text{SAS 全等}).$$

可得到

$$\angle ANH=\angle ACB=90^{\circ}.$$

又 $\angle ANU=90^{\circ}$ ，因此 $\angle ANH+\angle ANU=90^{\circ}+90^{\circ}=180^{\circ}$ ，故

$H-N-R$ 三點共線.

2. 先證明三角形 CUO 與三角形 ACB 全等，再得到四邊形 $CBKO$ 與四邊形 $ACOH$ 皆為平行四邊形：

因為 $\overline{CU}=\overline{AC},\ \ \angle CUO=\angle ACB=90^{\circ}$ ，又 $\angle UCO=90^{\circ}-\angle ACX=\angle CAB$ ，所以

$$\Delta CUO\cong\Delta ACB(\text{ASA 全等}).$$

可得到

$$\overline{CO}=\overline{AB}.$$

又 $\overline{AB}=\overline{BK}$ ，因此 $\overline{CO}=\overline{AB}=\overline{BK}$ ，且 $\overline{CO}//\overline{BK}$ ，故

四邊形 $CBKO$ 為平行四邊形.

同理， $\overline{CO}=\overline{AH}$ ，且 $\overline{CO}//\overline{AH}$ ，故

四邊形 $ACOH$ 為平行四邊形.

3. 證明三角形 ANH 與三角形 FCM 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle HAN=\angle MFC,\ \ \angle AHN=\angle FMC$ ，又 $\overline{AN}=\overline{FC}$ ，因此

$$\Delta AHN\cong\Delta FMC\ (\text{AAS 全等}).$$

4. 證明三角形 HOW ，三角形 GFL 皆與三角形 ACX 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle OHW=\angle CAX=\angle FGL,\ \ \angle HOW=\angle ACX=\angle GFL$ ，又因為四邊形 $ACOH$ 為平行四邊形，所以 $\overline{HO}=\overline{AC}=\overline{GF}$ ，因此

$$\Delta HOW\cong\Delta GFL\cong\Delta ACX\ (\text{ASA 全等}).$$

5. 證明四邊形 $AXON$ 與四邊形 $GLMA$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle AXO=\angle GLM,\ \ \angle XAN=\angle LGA,\ \ \angle ANO=\angle GAM$ ，且因為 $\Delta GFL\cong\Delta ACX$ ，所以 $\overline{GL}=\overline{AX}$. 又因為 $\overline{GA}=\overline{AN}$ ，所以

$$\text{四邊形}AXON\cong\text{四邊形}GLMA.$$

6. 證明三角形 KOR 與三角形 BCY 全等：

因為四邊形 $CBKO$ 為平行四邊形，所以 $\overline{OK}=\overline{CB}$，且由作圖的平行關係可知

$\angle KOR=\angle BCY$, $\angle OKR=\angle CBY$，所以

$$\Delta KOR\cong\Delta BCY \text{ (ASA 全等)}.$$

7. 證明三角形 OQP，三角形 BUR 與三角形 TDV 皆全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle POQ=\angle RBU$, $\angle OQP=\angle BUR=90°$，又因為 $\overline{OP}=\overline{BR}$，所以

$$\Delta OQP\cong\Delta BUR \text{ (AAS 全等)}.$$

同理，$\angle RBU=\angle VTD$, $\angle BUR=\angle TDV=90°$，又因為 $\overline{UR}=\overline{DV}$，所以

$$\Delta BUR\cong\Delta TDV \text{ (AAS 全等)}.$$

可得到

$$\Delta OQP\cong\Delta BUR\cong\Delta TDV.$$

8. 證明四邊形 $XBRO$ 與四邊形 $STVB$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle XOR=\angle SBV$, $\angle ORB=\angle BVT$, $\angle RBX=\angle VTS$，且因為

$\Delta BRU\cong\Delta TVD$，所以 $\overline{BR}=\overline{TV}$, $\overline{RU}=\overline{VD}$. 又因為 $\Delta CUO\cong\Delta ACB$，所以

$\overline{OU}=\overline{BC}=\overline{BD}$，因此 $\overline{OR}=\overline{OU}-\overline{RU}=\overline{BD}-\overline{VD}=\overline{BV}$，故

$$\text{四邊形}XBRO\cong\text{四邊形}STVB.$$

9. 證明四邊形 $PQKW$ 與四邊形 $YETS$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle PWK=\angle YST$, $\angle WKQ=\angle STE$, $\angle KQP=\angle TEY$，且因為

四邊形 $XBRO\cong$ 四邊形 $STVB$，所以 $\overline{ST}=\overline{XB}=\overline{WK}$. 又因為 $\Delta HOK\cong\Delta ACB$，所以

$\overline{OK}=\overline{CB}=\overline{ED}$. 因為 $\Delta OQP\cong\Delta TDV$，所以 $\overline{OQ}=\overline{TD}$，因此

$\overline{QK}=\overline{OK}-\overline{OQ}=\overline{ED}-\overline{TD}=\overline{ET}$，故

$$\text{四邊形}PQKW\cong\text{四邊形}YETS.$$

10. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形 $ABKH$ 面積＝ΔANH 面積＋ΔHOW 面積＋四邊形 $AXON$ 面積
＋四邊形 $XBRO$ 面積＋ΔKOR 面積＋ΔOQP 面積＋四邊形 $PQKW$ 面積
＝(ΔFCM 面積＋ΔGFL 面積＋四邊形 $GLMA$ 面積)
＋(四邊形 $STVB$ 面積＋ΔBCY 面積＋ΔTDV 面積＋四邊形 $YETS$ 面積)
＝正方形 $ACFG$ 面積＋正方形 $BCED$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 33). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此題證明所作的輔助線頗多，但繪圖過程皆與平行有關，學生可以看出對應角的相等情形；再利用平行四邊形的對邊等長的性質，使學生能夠判斷三角形之間的全等關係。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：