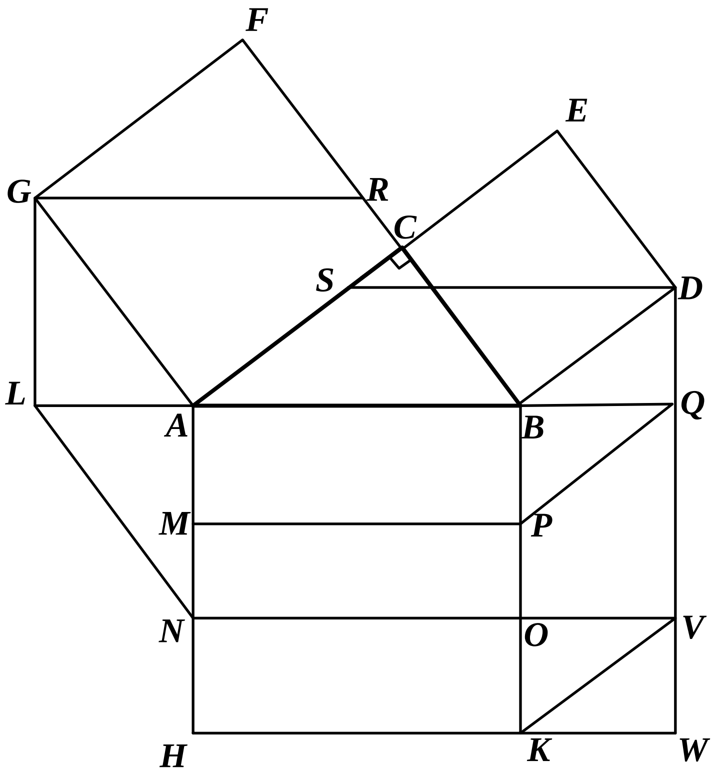
# 勾股定理證明-G061

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 $ABC$ 的 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 過 $G$ 作 $\overline{AH}$ 的平行線，與 $\overline{BA}$ 的延長線交於 $L$ 點。
3. 過 $D$ 作 $\overline{BK}$ 的平行線，分別與 $\overline{AB}$，$\overline{HK}$ 的延長線交於 $Q$ 點，$W$ 點。
4. 過 $Q$ 作 $\overline{BD}$ 的平行線，與 $\overline{BK}$ 交於 $P$ 點，再過 $P$ 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{AH}$ 交於 $M$ 點。
5. 過 $L$ 作 $\overline{AG}$ 的平行線，與 $\overline{AH}$ 於 $N$ 點。
6. 過 $N$ 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{BK}$ 交於 $O$ 點，再過 $K$ 作 $\overline{PQ}$ 的平行線(於證明過程第 1 點說明這兩條線會交於 $V$ 點)。
7. 過 $G$ 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{CF}$ 交於 $R$ 點。
8. 過 $D$ 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{AC}$ 交於 $S$ 點。

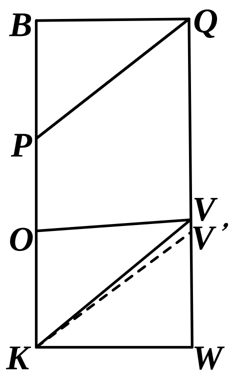


【求證過程】

先以直角三角形三邊為邊長作出三個正方形，先將正方形 $ABKH$ 可切割成兩個長方形，再利用推移得到這兩個長方形的面積和會等於正方形 $BCED$ 與 $ACFG$ 的面積和，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明過 $N$ 且與 $\overline{AB}$ 平行的直線，與過 $K$ 且與 $\overline{PQ}$ 平行的直線，會相交於 $V$ 點。

設過 $N$ 且與 $\overline{AB}$ 平行的直線，分別與 $\overline{BK}$, $\overline{QW}$ 交於 $O$ 點, $V$ 點，過 $K$ 且與 $\overline{PQ}$ 平行的直線，與 $\overline{QW}$ 交於 $V'$ 點。




由作圖的平行關係可知 $\angle BPQ = \angle OKV$, $\angle PBQ = \angle KOV = 90°$，又因為四邊形 $BQVO$ 為長方形，所以 $\overline{BQ} = \overline{OV}$，因此

$$\Delta BPQ \cong \Delta OKV \text{ (AAS 全等)}.$$

可得到

$$\overline{PQ} = \overline{KV}.$$

同理，

$$\Delta WV'K \cong \Delta BPQ \text{ (AAS 全等)}.$$

可得到

$$\overline{PQ} = \overline{KV'}.$$

因此，$\overline{KV} = \overline{KV'}$, $V$ 和 $V'$ 為同一點，故

過 $N$ 且與 $\overline{AB}$ 平行的直線，與過 $K$ 且與 $\overline{PQ}$ 平行的直線，會相交於 $V$ 點。

2. 證明四邊形 $BDQP$ 與四邊形 $SDBA$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係可知 $\overline{BP} // \overline{DQ}$, $\overline{BD} // \overline{PQ}$, 所以

四邊形 $BDQP$ 為平行四邊形。

同理，

四邊形 $SDBA$ 為平行四邊形。

3. 證明長方形 $ABPM$ 的面積等於正方形 $BCED$ 的面積：

因為四邊形 $BDQP$ 為平行四邊形，所以 $\overline{BP}=\overline{DQ}$，因此

$$\begin{aligned}\text{長方形}ABPM\text{ 面積} &= \overline{AB}\times\overline{BP}\\ &= \overline{AB}\times\overline{DQ}\\ &= \text{平行四邊形}SDBA\text{ 面積}.\end{aligned}$$

又因為 $\overline{AE}\,//\,\overline{BD}$ 且 $\overline{DE}\perp\overline{BD}$, 所以

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}SDBA\text{ 面積} &= \overline{BD}\times\overline{DE}\\ &= \text{正方形}BCED\text{ 面積}.\end{aligned}$$

故

$$\text{長方形}ABPM\text{ 面積}=\text{正方形}BCED\text{ 面積}.$$

4. 證明四邊形 $PQVK$ 為平行四邊形，且 $\overline{PK}=\overline{AN}$：

由作圖的平行關係可知 $\overline{PQ}\,//\,\overline{KV}$, $\overline{PK}\,//\,\overline{QV}$，所以

四邊形 $PQVK$ 為平行四邊形。

可得到

$$\overline{PK}=\overline{QV}.$$

又由作圖的平行關係可知四邊形 $AQVN$ 為長方形，所以

$$\overline{QV}=\overline{AN}.$$

故

$$\overline{PK}=\overline{QV}=\overline{AN}.$$

5. 證明長方形 $MPKH$ 的面積等於正方形 $ACFG$ 的面積：

因為 $\overline{MP}=\overline{AB}$, $\overline{PK}=\overline{AN}$，所以

$$\begin{aligned}\text{長方形}MPKH\text{ 面積} &= \overline{MP}\times\overline{PK}\\ &= \overline{AB}\times\overline{AN}\\ &= \text{長方形}ABON\text{ 面積}.\end{aligned}$$

又因為$\overline{GA} // \overline{LN}$，$\overline{GL} // \overline{AN}$，所以四邊形$GANL$為平行四邊形，因此$\overline{AN} = \overline{GL}$.

$$\begin{aligned} \text{長方形}ABON\text{ 面積} &= \overline{AB} \times \overline{AN} \\ &= \overline{AB} \times \overline{GL} \\ &= \text{平行四邊形}ABRG\text{ 面積}. \end{aligned}$$

又因為$\overline{GA} // \overline{BF}$，且$\overline{AG} \perp \overline{AC}$，所以

$$\begin{aligned} \text{平行四邊形}ABRG\text{ 面積} &= \overline{AG} \times \overline{AC} \\ &= \text{正方形}ACFG\text{ 面積}. \end{aligned}$$

故

$$\text{長方形}MPKH\text{ 面積} = \text{正方形}ACFG\text{ 面積}.$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABKH\text{ 面積} &= \text{長方形}ABPM\text{ 面積} + \text{長方形}MPKH\text{ 面積} \\ &= \text{正方形}BCED\text{ 面積} + \text{正方形}ACFG\text{ 面積}. \end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 28). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此題證明的作圖過程頗為複雜，且證明的關鍵在於過$N$且與$\overline{AB}$平行的直線，與過$K$且與$\overline{PQ}$平行的直線，會交於同一點。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| | | | ● | |