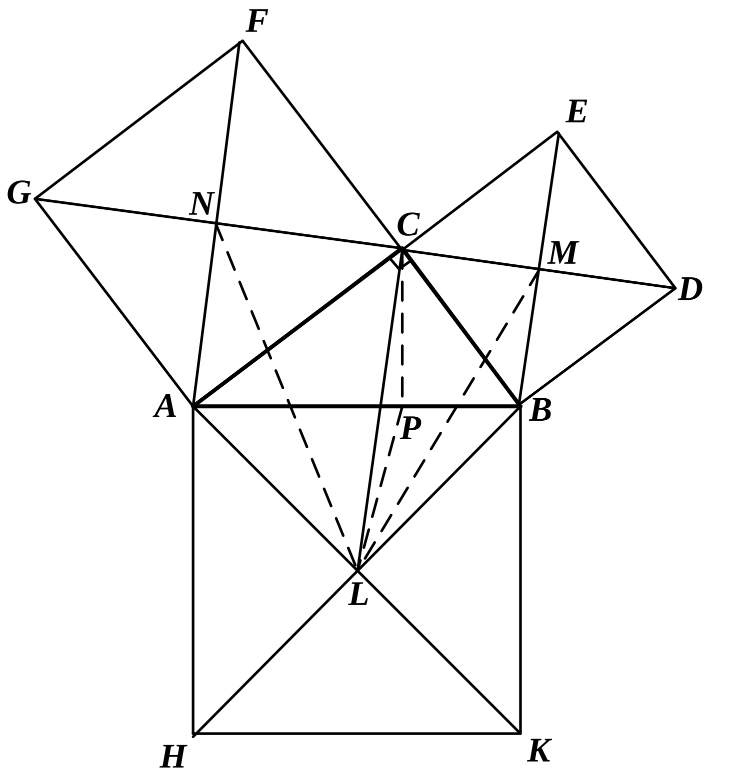
勾股定理證明-G060

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形ABC的$\overline{AC}$，$\overline{BC}$和$\overline{AB}$為邊長，向外作正方形$ACFG$，正方形$BCED$和正方形$ABKH$。
2. 連接正方形$ABKH$，正方形$BCED$和正方形$ACFG$的對角線，分別交於L點，M點和N點。
3. 連接$\overline{CL}$。
4. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於P點。
5. 連接$\overline{PM},\overline{PL},\overline{ML},\overline{PN},\overline{NL}$。



【求證過程】

先以直角三角形的三邊為邊長作出三個正方形，分別連接這三個正方形的對角線，各切割成四個全等的等腰直角三角形；再證明較小的兩正方形中的等腰直角三角形面積和等於最大正方形中的等腰直角三角形面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明$N-C-M$三點共線：

因為$\angle NCM=\angle NCA+\angle ACB+\angle BCM=45^\circ+90^\circ+45^\circ=180^\circ$，所以

$N-C-M$三點共線.

2. 證明$\overline{CL}$垂直於$\overline{ND}$，可推得$\overline{CL}$與$\overline{BM}$, $\overline{AN}$平行：

在四邊形$ALBC$中，因為$\angle ACB=\angle ALB=90^\circ$，所以四邊形$ALBC$為圓內接四邊形，因此

$$\angle LCB=\frac{1}{2}BL=\angle LAB=45^\circ，$$

又因為$\angle BCD=45^\circ$，所以

$$\angle LCD=\angle LCB+\angle BCD=45^\circ+45^\circ=90^\circ，即$$

$\overline{CL}$垂直於$\overline{ND}$，故

$$\overline{CL}\,//\,\overline{BM}\,//\,\overline{AN}.$$

3. 證明三角形BCM的面積相等於三角形BPL：

因為$\overline{CL}\,//\,\overline{BM}$，所以$\Delta BCM$面積$=\Delta BML$面積 (同以$\overline{BM}$為底，$\overline{CM}$為高)，且在四邊形$CPBM$中，因為$\angle CPB=\angle CMB=90^\circ$，所以四邊形$CPBM$為圓內接四邊形，因此

$$\angle BPM=\frac{1}{2}BM=\angle BCM=45^\circ，$$

又因為$\angle PBL=45^\circ$，所以$\overline{MP}\,//\,\overline{BL}$(內錯角相等)，

因此

$$\Delta BML面積=\Delta BPL面積\ (同以\overline{BL}為底，等高)$$

整理得

$$\Delta BCM面積=\Delta BML面積=\Delta BPL面積.$$

4. 證明三角形ACN的面積相等於三角形APL：

因為$\overline{CL}\,//\,\overline{AN}$，所以$\Delta ACN$面積$=\Delta ANL$面積 (同以$\overline{AN}$為底，$\overline{CN}$為高)，且在四邊形$NAPC$中，因為$\angle ANC=\angle APC=90^\circ$，所以四邊形$NAPC$為圓內接四邊形，因此

$$\angle APN=\frac{1}{2}AN=\angle ACN=45^\circ，$$

又因為$\angle PAL=45^\circ$，所以$\overline{NP}\,//\,\overline{AL}$(內錯角相等)，因此

$$\Delta ANL\text{ 面積}=\Delta APL\text{ 面積}\quad(\text{同以 }\overline{AL}\text{ 為底，等高})$$

整理得

$$\Delta ACN\text{ 面積}=\Delta ANL\text{ 面積}=\Delta APL\text{ 面積}.$$

5. 由第 3, 4 點結論可推得三角形 ABL 面積等於三角形 BCM 與三角形 ACN 的面積和，推論出勾股定理的相關式：

$$\begin{aligned}\Delta ABL\text{面積}&=\Delta BPL\text{面積}+\Delta APL\text{面積}\\&=\Delta BCM\text{ 面積}+\Delta ACN\text{面積}.\end{aligned}$$

因為

$$\Delta ABL\text{面積}=\frac{1}{4}\text{正方形}ABKH\text{ 面積},$$
$$\Delta BCM\text{ 面積}=\frac{1}{4}\text{正方形}BCED\text{面積},$$
$$\Delta ACN\text{面積}=\frac{1}{4}\text{正方形}ACFG\text{面積}.$$

所以

$$\frac{1}{4}\text{正方形}ABKH\text{面積}=\frac{1}{4}\text{正方形}BCED\text{面積}+\frac{1}{4}\text{正方形}ACFG\text{面積}.$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 96). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：此題證明的輔助線簡單易畫，但證明的過程複雜困難。先證明三角形 BCM 和三角形 BPL 的面積相等，三角形 ACN 和三角形 APL 的面積相等，可得到三角形 ABL 的面積為三角形 BCM 與三角形 ACN 的面積和，進而推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 說明：此題證明三角形 ABL 的面積等於三角形 BCM 與三角形 ACN 面積和的方法，與 G235 相同，因此多畫了 $\overline{CP},\overline{PM},\overline{PN},\overline{PL},\overline{ML},\overline{NL}$ 等線段。