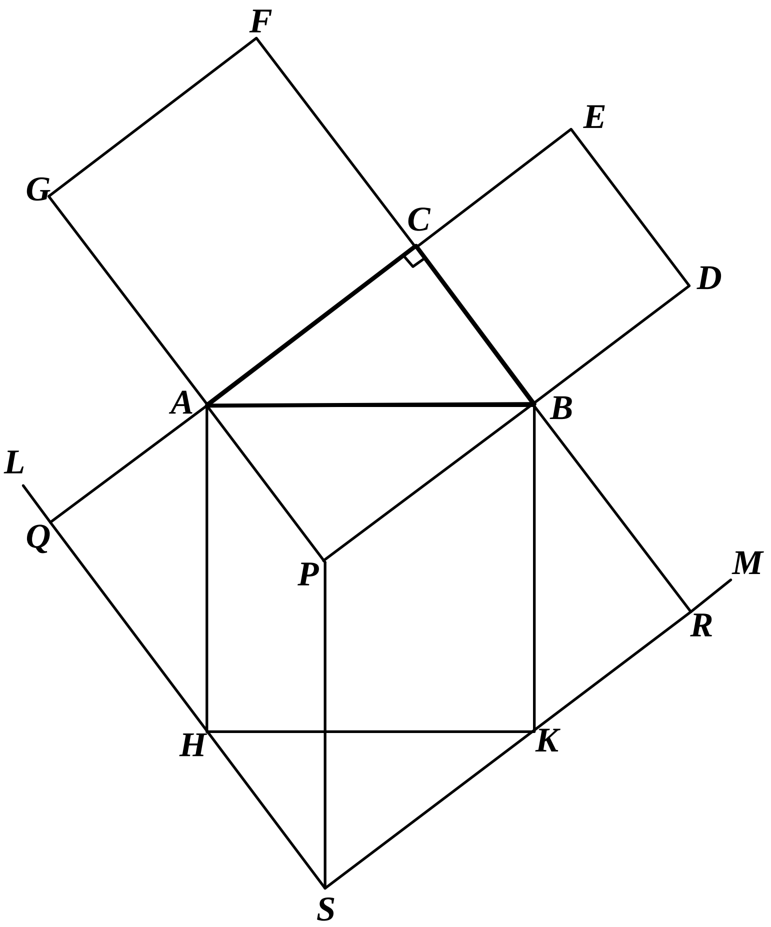
勾股定理證明-G059

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$。
2. 延長 $\overline{GA}$ 和 $\overline{DB}$，使得直線 GA 和直線 DB 相交於 P 點。
3. 過 H 作一直線 L 平行 $\overline{BC}$，使其和 $\overline{CA}$ 的延長線相交於 Q 點。
4. 過 K 作一直線 M 平行 $\overline{AC}$，使其和 $\overline{CB}$ 的延長線相交於 R 點。
5. L 與 M 相交於 S 點，並連接 $\overline{PS}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，先證明圖中的三角形全等，再利用作圖的平行關係，得到兩個平行四邊形 $APSH$ 與 $PBKS$，經過全等圖形的增補與移除關係，分別得到正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 BAP 、三角形 HAQ 、三角形 KHS 、三角形 BKR 皆與三角形 ABC 全等：

因為 $\overline{AB}=\overline{AB},\quad \angle ACB=\angle BPA=90°$ ，且 $\angle CBA=90°-\angle CAB=\angle PAB$ ，所以

$$\Delta BAP\cong\Delta ABC\,(\text{AAS 全等}).$$

$$\text{同理},\ \Delta HAQ\cong\Delta KHS\cong\Delta BKR\cong\Delta ABC\,.$$

綜合以上結果可得

$$\Delta ABC\cong\Delta BAP\cong\Delta HAQ\cong\Delta KHS\cong\Delta BKR.$$

2. 證明四邊形 $APSH$ ，四邊形 $PBKS$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AP}\,//\,\overline{HS}$ ，又 $\Delta BAP\cong\Delta KHS$ ，所以 $\overline{AP}=\overline{HS}$. 因此

$$\text{四邊形 } APSH \text{ 為平行四邊形}.$$

同理

$$\text{四邊形 } PBKS \text{ 為平行四邊形}.$$

3. 證明兩個平行四邊形 $APSH$ 與 $PBKS$ 面積分別與兩正方形 $BCED$ 與 $ACFG$ 面積相等：

因為 $\Delta BAP\cong\Delta HAQ\cong\Delta ABC$ ，所以 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{BC},$

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}APSH\text{ 面積}&=\overline{AP}\times\overline{AQ}\\&=\overline{BC}\times\overline{BC}\\&=\text{正方形}BCED\text{面積}.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}PBKS\text{ 面積}&=\overline{PB}\times\overline{BR}\\&=\overline{AC}\times\overline{AC}\\&=\text{正方形}ACFD\text{面積}.\end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\text{五邊形}AHSKB\text{面積}-\Delta KHS\text{ 面積}\\&=\text{五邊形}AHSKB\text{面積}-\Delta BAP\text{ 面積}\\&=\text{平行四邊形}APSH\text{ 面積}+\text{平行四邊形}PBKS\text{ 面積}\\&=\text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2\,.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 66). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此題證明利用輔助線的平行關係，說明圖中的三角形全等。先將正方形 $ABKH$ 面積轉換為平行四邊形 $APSH$ 與平行四邊形 $PBKS$ 的面積和，再利用底與高的計算，將平行四邊形面積轉換為正方形面積，進而推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此題輔助線畫法與 G058 相似，不同的地方在於省略$\overline{OC}$，$\overline{OE}$，$\overline{OF}$，$\overline{GQ}$，$\overline{DR}$ ，但證明方法較為簡單，適合國中生的程度。