勾股定理證明-G058

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$， $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。

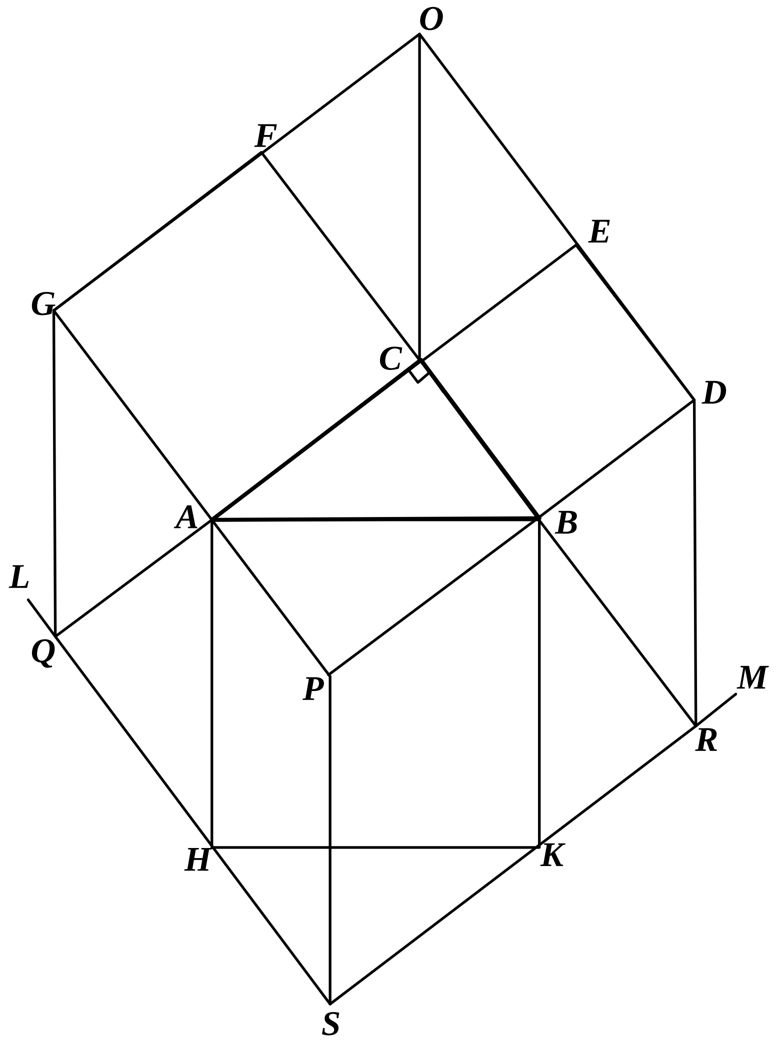
2. 延長 $\overline{GF}$ 和 $\overline{DE}$ ，使得直線 $\overline{GF}$ 和直線 $\overline{DE}$ 相交於 O ，並連接 $\overline{CO}$ 。

3. 延長 $\overline{GA}$ 和 $\overline{DB}$ ，使得直線 GA 和直線 DB 相交於 P 點。

4. 過 H 作一直線 L 平行 $\overline{BC}$ ，使其和 $\overline{CA}$ 的延長線相交於 Q 點。

5. 過 K 作一直線 M 平行 $\overline{AC}$ ，使其和 $\overline{CB}$ 的延長線相交於 R 點。

6. L 與 M 相交於 S 點，並連接 $\overline{PS}$， $\overline{OC}$， $\overline{OE}$， $\overline{OF}$， $\overline{GQ}$， $\overline{DR}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，利用作圖的平行關係，形成兩組面積相等的平行四邊形，再經過全等圖形的增補與移除關係，分別得到正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 BAP 、三角形 HAQ 、三角形 KHS 、三角形 BKR 皆與三角形 ABC 全等：

因為 $\overline{AB} = \overline{AB},\ \ \angle ACB = \angle BPA = 90°$ ，且 $\angle CBA = 90° - \angle CAB = \angle PAB$ ，所以

$$\Delta BAP \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

$$\text{同理, } \Delta HAQ \cong \Delta BAP,\ \Delta KHS \cong \Delta HAQ,\ \Delta BKR \cong \Delta KHS.$$

綜合以上結果可得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAP \cong \Delta HAQ \cong \Delta KHS \cong \Delta BKR.$$

2. 證明三角形 COF 、三角形 OCE 、三角形 RDB 、三角形 GQA 皆與三角形 ABC 全等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $OFCE$ 為長方形, 所以 $\overline{OF} = \overline{CE} = \overline{BC},\ \overline{OE} = \overline{CF} = \overline{AC}.$

又 $\angle CFO = \angle ACB = 90°$, 因此

$$\Delta COF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

$$\text{同理, } \Delta OCE \cong \Delta ABC,\ \Delta RDB \cong \Delta ABC,\ \Delta GQA \cong \Delta ABC.$$

綜合以上結果可得

$$\Delta ABC \cong \Delta COF \cong \Delta OCE \cong \Delta RDB \cong \Delta GQA.$$

3. 證明四邊形 $APSH$, 四邊形 $PBKS$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AP} // \overline{HS}$, 又 $\Delta BAP \cong \Delta KHS$, 所以 $\overline{AP} = \overline{HS}$. 因此

四邊形 $APSH$ 為平行四邊形.

同理

四邊形 $PBKS$ 為平行四邊形.

4. 證明四邊形 $GPSQ$, 四邊形 $ODRC$ 皆為平行四邊形，且其面積相等：

由作圖的平行關係可知 $\overline{GP} // \overline{QS}$, 又 $\Delta GQA \cong \Delta HAQ$, 故 $\overline{GP} = \overline{GA} + \overline{AP} = \overline{QH} + \overline{HS} = \overline{QS}$,

因此四邊形 $GPSQ$ 為平行四邊形, 同理可知四邊形 $ODRC$ 為平行四邊形.

由等底等高關係，可得到

平行四邊形 $GPSQ$ 面積 = 平行四邊形 $ODRC$ 面積.

5. 證明四邊形 $PDRS$, 四邊形 $GOCQ$ 皆為平行四邊形，且其面積相等：

由作圖的平行關係可知 $\overline{PD} // \overline{SR}$, 又因為四邊形 $PBKS$ 為平行四邊形, $\Delta RDB \cong \Delta BKR$,

故 $\overline{PD} = \overline{PB} + \overline{BD} = \overline{SK} + \overline{KR} = \overline{SR}$, 因此四邊形 $PDRS$ 為平行四邊形, 同理可知

四邊形 $GOCQ$ 為平行四邊形.

由等底等高關係，可得到

平行四邊形 $PDRS$ 面積 = 平行四邊形 $GOCQ$ 面積.

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$ 面積＝五邊形$AHSKB$面積－ΔKHS 面積
＝五邊形$AHSKB$面積－ΔBAP 面積
＝平行四邊形$APSH$ 面積＋平行四邊形$PBKS$ 面積
＝(平行四邊形$GPSQ$ 面積－ΔGQA面積－ΔHAQ 面積)
＋(平行四邊形$PDRS$ 面積－ΔRDB 面積－ΔBKR 面積)
＝(平行四邊形$ODRC$ 面積－ΔOCE 面積－ΔRDB 面積)
＋(平行四邊形$GOCQ$ 面積－ΔCOE 面積－ΔGQA面積)
＝正方形$BCED$ 面積＋正方形$ACFG$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.160). New York : Macmillan and co.

J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 2(2), 16.

2. 心得：此題證明利用輔助線的平行關係，說明圖中的三角形全等。再將正方形 $ABKH$ 面積轉換為平行四邊形 $APSH$ 與平行四邊形 $PBKS$ 的面積和，再透過全等圖形的增補與移除關係，來推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		