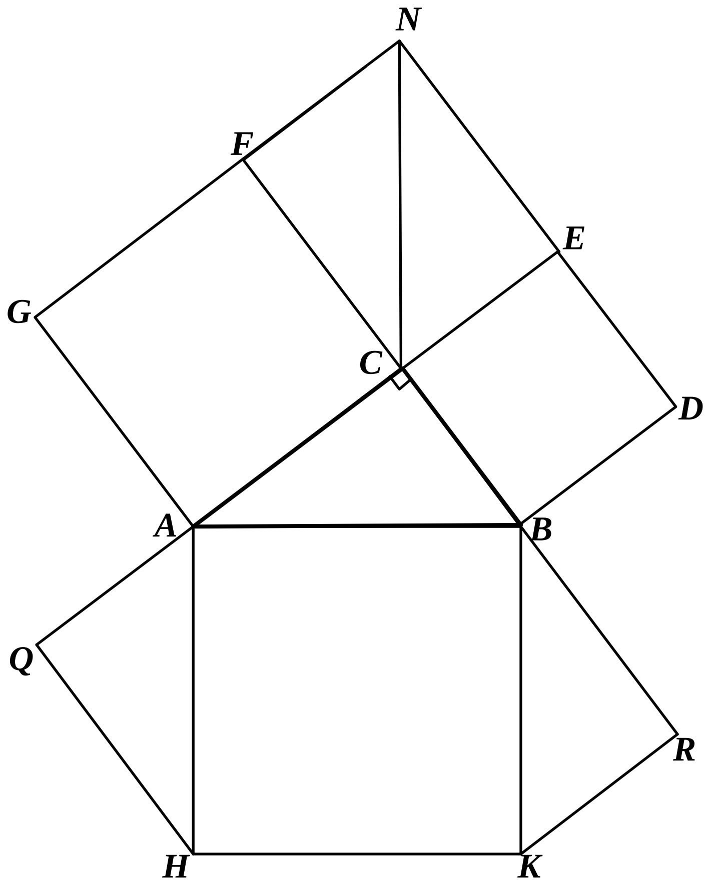
勾股定理證明-G057

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$， $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 延長 $\overline{GF}$ 和 $\overline{DE}$ ，使得直線 $\overline{GF}$ 和直線 $\overline{DE}$ 相交於 N 點，並連接 $\overline{CN}$ 。
3. 過 H 點作直線 $\overline{CA}$ 的垂線，交直線 $\overline{CA}$ 於 Q 點。
4. 過 K 點作直線 $\overline{CB}$ 的垂線，交直線 $\overline{CB}$ 於 R 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，利用作圖的平行關係，形成兩個全等的五邊形，再經過全等圖形的增補與移除關係，分別得到正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 HAQ ，三角形 BKR 皆與三角形 ABC 全等：

因為 $\angle HAQ = 90° - \angle CAB = \angle ABC$ ，且 $\overline{AB} = \overline{AH}$, $\angle ACB = \angle AQH = 90°$ ，因此

$$\Delta HAQ \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

同理可證

$$\Delta BKR \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

2. 證明三角形 CNF ，三角形 NCE ，三角形 HAQ ，三角形 BKR 皆與三角形 ABC 全等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $NFCE$ 為長方形，因此 $\overline{NF}=\overline{CE}=\overline{BC}$, $\overline{NE}=\overline{CF}=\overline{AC}$,

$\angle CFN=\angle NEC=\angle ACB=90°$ ，故

$$\Delta CNF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

同理可證

$$\Delta NCE \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

綜合以上結果可得

$$\Delta ABC \cong \Delta CNF \cong \Delta NCE \cong \Delta HAQ \cong \Delta BKR.$$

3. 說明五邊形 $NGABD$ 與五邊形 $CQHKR$ 對應的內角相等：

因為 $\Delta HAQ \cong \Delta BKR \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle QHA=\angle CAB$, $\angle BKR=\angle ABC$ ，因此

$$\angle GAB=90°+\angle CAB=90°+\angle QHA=\angle QHK,$$

$$\angle ABD=\angle ABC+90°=\angle BKR+90°=\angle HKR,$$

又 $\angle GND=\angle QCR=90°$, $\angle G=\angle Q=90°$, $\angle D=\angle R=90°$ ，綜合以上結果可得

五邊形 $NGABD$ 與五邊形 $CQHKR$ 對應的內角皆相等。

4. 說明五邊形 $NGABD$ 與五邊形 $CQHKR$ 對應的邊長相等：

因為 $\Delta ABC \cong \Delta CNF \cong \Delta NCE \cong \Delta HAQ \cong \Delta BKR$ ，所以

$$\overline{NG}=\overline{NF}+\overline{FG}=\overline{AQ}+\overline{AC}=\overline{CQ},$$

$$\overline{ND}=\overline{NE}+\overline{ED}=\overline{BR}+\overline{BC}=\overline{CR},$$

又 $\overline{GA}=\overline{QH}$, $\overline{AB}=\overline{HK}$, $\overline{BD}=\overline{KR}$ ，綜合以上結果可得

五邊形 $NGABD$ 與五邊形 $CQHKR$ 對應的邊長皆相等。

5. 證明五邊形的全等：

由上述證明的結果，得到五邊形對應的邊角相等關係，可得

五邊形 $NGABD \cong$ 五邊形 $CQHKR$.

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形 $ABKH$ 面積＝五邊形 $CQHKR$ 面積－(ΔABC 面積＋ΔHAQ 面積＋ΔBKR 面積)

＝五邊形 $NGABD$ 面積－(ΔABC 面積＋ΔCNF 面積＋ΔNCE 面積)

＝正方形 $BCED$ 面積＋正方形 $ACFG$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 55). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：此題先證明三角形CNF，三角形NCE，三角形HAQ，三角形BKR皆與三角形ABC全等，再說明五邊形$NGABD$與五邊形$CQHKR$全等，進一步利用全等圖形的增補關係，推得勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		