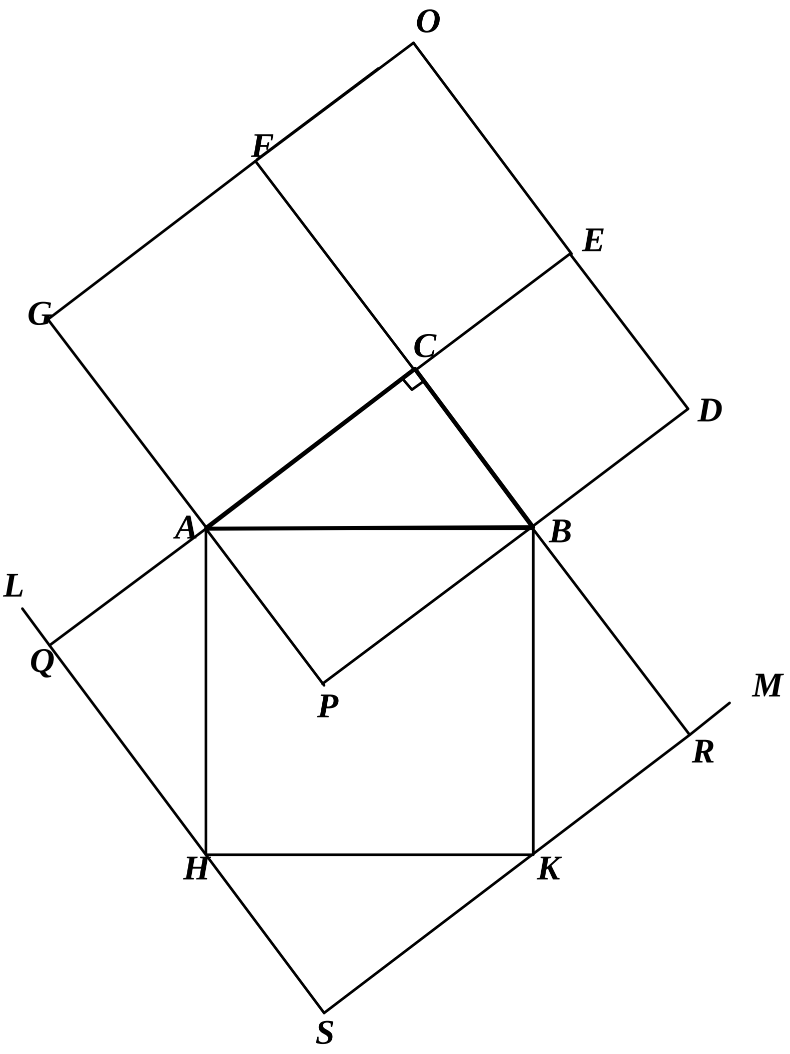
勾股定理證明-G056

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形ABC的$\overline{AC}$，$\overline{BC}$和$\overline{AB}$為邊長，向外作正方形$ACFG$，正方形$BCED$和正方形$ABKH$。
2. 延長$\overline{GF}$和$\overline{DE}$，使得直線$\overline{GF}$和直線$\overline{DE}$相交於O點。
3. 延長$\overline{GA}$和$\overline{DB}$，使得直線GA和直線DB相交於P點。
4. 過H作一直線L平行$\overline{BC}$，使其和$\overline{CA}$的延長線相交於Q點。
5. 過K作一直線M平行$\overline{AC}$，使其和$\overline{CB}$的延長線相交於R點。
6. L與M相交於S點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，利用作圖的平行關係，形成兩個全等的大正方形，再經過全等圖形的增補與移除關係，分別得到正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形 $ACBP$，$OFCE$ 為長方形，四邊形 $OGPD$ 為正方形：

由作圖的平行關係可知四邊形 $CEPF$，$OFCE$，$OGPD$ 皆為長方形，又 $\overline{AP}=\overline{BC}=\overline{BD}$，

$\overline{GA}=\overline{AC}=\overline{PB}$，因此 $\overline{GP}=\overline{GA}+\overline{AP}=\overline{PB}+\overline{BD}=\overline{PD}$. 故

四邊形 $OGPD$ 為正方形.

2. 證明三角形 HAQ，三角形 KHS 與三角形 BKR 皆與三角形 CAB 全等：

因為 $\angle ABC=90°-\angle CAB=\angle HAQ$，且 $\overline{AB}=\overline{AH}$，$\angle ACB=\angle AQH=90°$，所以

$$\Delta HAQ\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

同理可得

$$\Delta KHS\cong\Delta ABC,\ \Delta BKR\cong\Delta ABC.$$

3. 證明四邊形 $CQSR$ 為正方形：

由作圖的平行關係可知四邊形 $CQSR$ 為長方形，又 $\Delta HAQ\cong\Delta BKR\cong\Delta ABC$，所以

$\overline{AQ}=\overline{BC}$，$\overline{AC}=\overline{BR}$，因此 $\overline{CQ}=\overline{AC}+\overline{AQ}=\overline{BR}+\overline{BC}=\overline{CR}$. 故

四邊形 $CQSR$ 為正方形.

4. 由作圖的平行關係可得到：

四邊形 $ACBP$，$OFCE$ 皆為長方形，且

$$\text{長方形}ACBP\text{面積}=\overline{BC}\times\overline{AC}=2\times\Delta ABC\text{面積}.$$

又 $\overline{CE}=\overline{BC}$，$\overline{CF}=\overline{AC}$，因此

$$\text{長方形}OFCE\text{面積}=\overline{CE}\times\overline{CF}=\overline{BC}\times\overline{AC}=2\times\Delta ABC\text{面積}.$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\text{正方形}CQSR\text{面積}-(\Delta ABC\text{面積}+\Delta HAQ\text{面積}+\Delta KHS\text{面積}\\&\qquad+\Delta BKR\text{面積})\\&=\text{正方形}CQSR\text{面積}-4\times\Delta ABC\text{面積}\\&=\text{正方形}OGPD\text{面積}-(\text{長方形}ACBP\text{面積}+\text{長方形}OFCE\text{面積})\\&=\text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於以下書籍或期刊：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 54). Amsterdam: A. Versluys.

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 82). Paris: Vuibert et Nony.

   J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 2(2), 18.

2. 心得：此題證明的關鍵在於證明正方形 $CQSR$ 與正方形 $OGPD$ 為面積相同的正方形，再透過全等三角形的面積增補關係，推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		