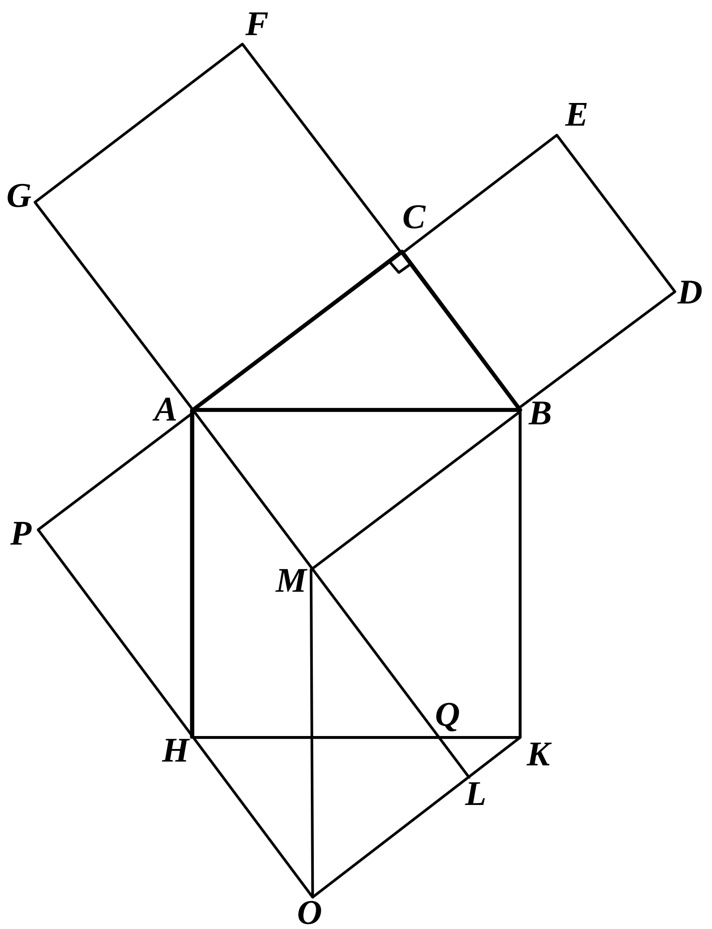
勾股定理證明-G055

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$， $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 延長 $\overline{GA}$ 和 $\overline{DB}$ ，使得直線 GA 和直線 DB 相交於 M 點。
3. 過 H 作一直線平行 $\overline{AM}$ 且與直線 CA 相交於 P 點。
4. 過 K 點作直線 $\overline{PH}$ 的垂線，交直線 $\overline{PH}$ 於 O 點。
5. 延長 $\overline{AM}$ ，交 $\overline{KO}$ 於 L 點。
6. 連接 $\overline{MO}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，將正方形 $ABKH$ 區域切割為兩

個直角三角形和一個四邊形，再利用推移得到兩個平行四邊形，最後再證明這兩個平行四邊形的面積和會等於正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積和，進而推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 AMB 與三角形 HOK 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle BAM = \angle KHO$ ，且 $\overline{AB} = \overline{HK}$, $\angle AMB = \angle HOK = 90°$ ，因此

$$\Delta AMB \cong \Delta HOK \text{ (AAS 全等)}.$$

得到

$$\overline{AM} = \overline{HO},\ \overline{BM} = \overline{KO}.$$

2. 證明四邊形 $AHOM$ 與四邊形 $BKOM$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AM} // \overline{HO}$ ，且 $\overline{AM} = \overline{HO}$ ，所以

四邊形 $AHOM$ 為平行四邊形。

同理可證

四邊形 $BKOM$ 亦為平行四邊形。

3. 證明三角形 APH 與三角形 BCA 全等：

因為 $\angle PAH = 90° - \angle CAB = \angle CBA$ ，且 $\overline{AH} = \overline{AB}$, $\angle APH = \angle BCA = 90°$ ，所以

$$\Delta APH \cong \Delta BCA \text{ (AAS 全等)}.$$

得到

$$\overline{PH} = \overline{CA},\ \overline{AP} = \overline{BC}.$$

4. 證明三角形 APH 與三角形 OLM 全等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $APOL$ 為長方形，所以 $\overline{AP} = \overline{LO}$ ，因為四邊形 $AHOM$ 為平行四邊形，所以 $\overline{AH} = \overline{OM}$ ，又 $\angle APH = \angle OLM = 90°$，因此

$$\Delta APH \cong \Delta OLM \text{ (RHS 全等)}.$$

得到

$$\overline{LM} = \overline{PH} = \overline{CA}.$$

5. 證明平行四邊形 $AHOM$ 與正方形 $BCED$ 的面積相等：

$$\begin{aligned}
\text{平行四邊形}AHOM\text{ 面積} &= \overline{OH} \times \overline{AP} \\
&= \overline{AM} \times \overline{BC} \\
&= \overline{BC} \times \overline{BC} \\
&= \text{正方形}BCED\text{面積}.
\end{aligned}$$

6. 證明平行四邊形 $BKOM$ 與正方形 $ACFG$ 的面積相等：

$$
\begin{aligned}
\text{平行四邊形}BKOM\text{ 面積} &= \overline{OK}\times\overline{LM}\\
&= \overline{BM}\times\overline{PH}\\
&= \overline{CA}\times\overline{CA}\\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積.}
\end{aligned}
$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta ABM\text{面積}+\Delta AHQ\text{面積}+\text{四邊形}MQKB\text{面積}\\
&= \Delta HOK\text{ 面積}+\Delta AHQ\text{ 面積}+\text{四邊形}MQKB\text{面積}\\
&= \text{平行四邊形}AHOM\text{ 面積}+\text{平行四邊形}BKOM\text{ 面積}\\
&= \text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積.}
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍

   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.159). New York : Macmillan and co.

   The Journal of Education, V. XXVIII, 1888, p. 17, 28th proof.

   Heath's Mathematical Monographs, No.2, 1900, p. 31, proof XVIII.

2. 心得：此題先證明三角形 AMB 與三角形 HOK 全等，再利用全等圖形的增補關係，將正方形 $AHKB$ 分割成兩塊平行四邊形，再利用底高的面積計算概念，分別將兩塊平行四邊形轉換為面積相同的正方形，進而推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		