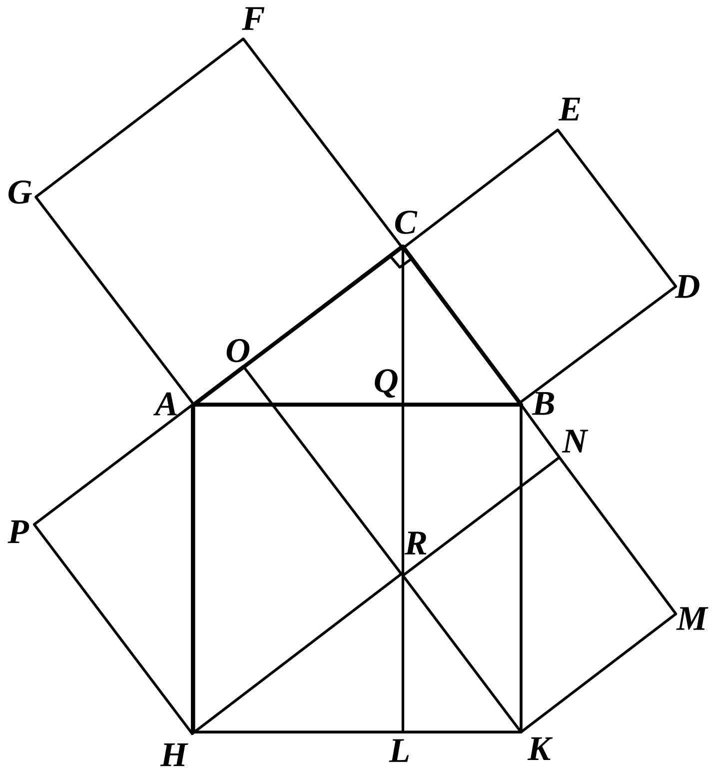
勾股定理證明-G054

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$， $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 過 K 點作直線 $\overline{BC}$ 的垂線，交直線 $\overline{BC}$ 於 M 點。
3. 過 H 點作直線 $\overline{AC}$ 的垂線，交直線 $\overline{AC}$ 於 P 點。
4. 過 K 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，交 $\overline{AC}$ 於 O 點。
5. 過 H 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，交 $\overline{CM}$ 於 N 點，並交 $\overline{KO}$ 於 R 點。
6. 連接 $\overline{CR}$ ，並延長 $\overline{CR}$ ，與 $\overline{HK}$ 相交於 L 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，將正方形 $ABKH$ 區域切割為兩個長方形，利用推移得到相同面積的兩個平行四邊形，再利用底高線段相等的關係，分別得到正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 HAP，三角形 HKR，三角形 BKM 皆與三角形 ABC 全等：

因為 $\overline{AB}=\overline{AH}$, $\angle ACB=\angle APH=90°$，且 $\angle CAB=90°-\angle PAH=\angle PHA$，所以

$$\Delta HAP\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

同理可證

$$\Delta BKM\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

又由作圖的平行關係可知 $\angle HRK=\angle ACB=90°$, $\angle RHK=\angle CAB$ 且 $\overline{HK}=\overline{AB}$，因此

$$\Delta HKR\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

綜合以上結果可得

$$\Delta HAP\cong\Delta BKM\cong\Delta HKR\cong\Delta ABC.$$

2. 證明四邊形 $ACRH$，四邊形 $CBKR$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AC}\parallel\overline{HR}$，又 $\Delta ABC\cong\Delta HKR$，所以 $\overline{AC}=\overline{HR}$. 因此

四邊形 $ACRH$ 為平行四邊形.

同理可證

四邊形 $CBKR$ 為平行四邊形.

3. 證明四邊形 $AQLH$，四邊形 $QBKL$ 皆為長方形：

因為四邊形 $ACRH$ 為平行四邊形，所以 $\overline{CR}\parallel\overline{AH}$，即 $\overline{QL}\parallel\overline{AH}$.

又因為 $\overline{AH}\perp\overline{HK}$，所以 $\angle HLQ=90°$，因此

四邊形 $AQLH$ 為長方形.

同理可證

四邊形 $QBKL$ 為長方形.

4. 證明三角形 CRN 與三角形 ABC 全等：

因為四邊形 $AQLH$ 為長方形，所以 $\angle AQC=\angle AQL=90°$，可得到

$$\angle BCQ=90°-\angle ACQ=\angle CAQ.$$

又 $\overline{CR}=\overline{AH}=\overline{AB}$, $\angle ACB=\angle CNR=90°$，因此

$$\Delta CRN\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

5. 證明長方形 $QBKL$ 面積等於正方形 $BCED$ 面積，長方形 $AQLH$ 面積等於正方形 $ACFG$ 面積：

因為 $\Delta CRN\cong\Delta ABC$，所以 $\overline{RN}=\overline{BC}$，因此

長方形$QBKL$ 面積$=\overline{BK}\times\overline{BQ}$

$=$平行四邊形$CBKR$ 面積(同底同高)

$=\overline{BC}\times\overline{RN}$

$=\overline{BC}\times\overline{BC}$

$=$正方形$BCDE$ 面積.

同理可證

長方形$AQLH$ 面積$=\overline{AH}\times\overline{AQ}$

$=$平行四邊形$ACRH$ 面積(同底同高)

$=\overline{AC}\times\overline{PH}$

$=\overline{AC}\times\overline{AC}$

$=$正方形$ACFG$ 面積.

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形$ABKH$ 面積＝長方形$QBKL$面積＋長方形 $AQLH$面積

＝平行四邊形$CBKR$面積＋平行四邊形$ACRH$ 面積

＝正方形$BCED$面積＋正方形$ACFG$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(11), 169 .

2. 心得：此題證明過程是先將正方形 $AHKB$ 分割成兩塊長方形，再利用底高的面積計算概念，分別將兩塊長方形轉換為面積相同的平行四邊形，進而推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		