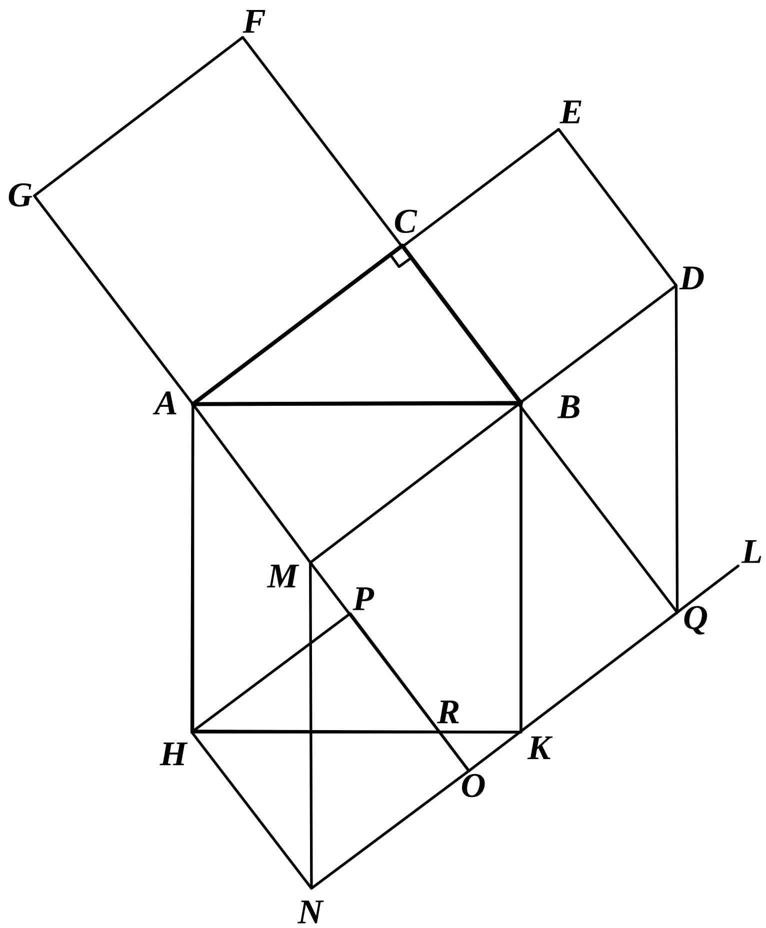
勾股定理證明-G053

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 過 K 點作一直線 L 平行 $\overline{AC}$ 。
3. 延長 $\overline{CB}$ ，與直線 L 交於 Q 點。
4. 延長 $\overline{GA}$ ，與 $\overline{HK}$ 交於 R 點，與直線 L 交於 O 點。
5. 延長 $\overline{DB}$ ，與 $\overline{AR}$ 交於 M 點。
6. 過 H 點分別作直線 L，$\overline{MO}$ 的垂線，與直線 L 交於 N 點，與 $\overline{MO}$ 交於 P 點。
7. 連接 $\overline{MN}$，$\overline{DQ}$ 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，先證明圖中的三角形全等，再利用作圖的平行關係，得到兩個平行四邊形 $AMNH$ 與 $MBKN$ ，經過全等圖形的增補與移除關係，分別得到正方形 $BCED$ 與正方形 $ACFG$ 的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 BAM ，三角形 AHP，三角形 KHN ，三角形 BKQ 皆與三角形 ABC 全等：

   因為 $\angle BAH = 90° - \angle CAB = \angle ABC$ ，且 $\overline{AB} = \overline{AB},\quad \angle ACB = \angle AMB = 90°$ ，所以

   $$\Delta BAM \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

   同理可證

   $$\Delta AHP \cong \Delta ABC,\ \ \Delta KHN \cong \Delta ABC,\ \ \Delta BKQ \cong \Delta ABC.$$

   綜合以上結果可得

   $$\Delta BAM \cong \Delta AHP \cong \Delta KHN \cong \Delta BKQ \cong \Delta ABC.$$

2. 證明四邊形 $AMNH$, 四邊形 $MBKN$ 皆為平行四邊形：

   由作圖的平行關係可知 $\overline{AM} // \overline{HN}$ ，又因為 $\Delta BAM \cong \Delta KHN$ ，所以 $\overline{AM} = \overline{HN}$. 因此

   $$\text{四邊形 } AMNH \text{ 為平行四邊形.}$$

   同理可證

   $$\text{四邊形 } MBKN \text{ 為平行四邊形.}$$

3. 證明四邊形 $HPON$ ，四邊形 $MBQO$ 皆為正方形：

   由作圖的平行關係可知四邊形 $HPON$ 為長方形，又因為 $\Delta AHP \cong \Delta KHN$，所以 $\overline{HP} = \overline{HN}$.

   因此

   $$\text{四邊形 } HPON \text{ 為正方形.}$$

   同理可證

   $$\text{四邊形 } MBQO \text{ 為正方形.}$$

4. 證明平行四邊形 $AMNH$ 面積等於正方形 $HPON$ 面積，平行四邊形 $MBKN$ 的面積等於正方形 $MBQO$ 面積：

   $$\begin{aligned}\text{平行四邊形} AMNH \text{ 面積} &= \overline{HN} \times \overline{HP} \\ &= \text{正方形} HPON \text{面積.}\end{aligned}$$

   同理可證

   $$\begin{aligned}\text{平行四邊形} MBKN \text{ 面積} &= \overline{MB} \times \overline{BQ} \\ &= \text{正方形} MBQO \text{面積.}\end{aligned}$$

5. 證明正方形 $HPON$ 面積等於正方形 $BCED$ 面積，正方形 $MBQO$ 面積等於正方形 $ACFG$ 面積：

   因為 $\Delta AHP \cong \Delta KHN \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{HP} = \overline{HN} = \overline{BC}$. 因此

$$\begin{aligned}\text{正方形}HPON\text{ 面積} &= \overline{HN}\times\overline{HP} \\ &= \overline{BC}\times\overline{BC} \\ &= \text{正方形}BCED\text{面積.}\end{aligned}$$

同理可證

$$\begin{aligned}\text{正方形}MBON\text{ 面積} &= \overline{MB}\times\overline{BQ} \\ &= \overline{AC}\times\overline{AC} \\ &= \text{正方形}ACFG\text{面積.}\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積} &= \Delta BAM\text{ 面積}+\Delta AHR\text{面積}+\text{四邊形}MBKR\text{面積} \\ &= \Delta KHN\text{ 面積}+\Delta AHR\text{面積}+\text{四邊形}MBKR\text{面積} \\ &= \text{凹六邊形}AHNKBM\text{ 面積} \\ &= \text{平行四邊形}AMNH\text{ 面積}+\text{平行四邊形}MBKN\text{ 面積} \\ &= \text{正方形}HPON\text{ 面積}+\text{正方形}MBQO\text{面積} \\ &= \text{正方形}BCED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{ 面積.}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍
   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.157). New York : Macmillan and co.
2. 心得：此題先證明圖中的三角形全等，再利用作圖的平行關係與全等圖形的增補，將正方形 *AHKB* 分割成兩塊平行四邊形，再利用底高的面積計算概念，分別將兩塊平行四邊形轉換為面積相同的正方形，進而推得勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		