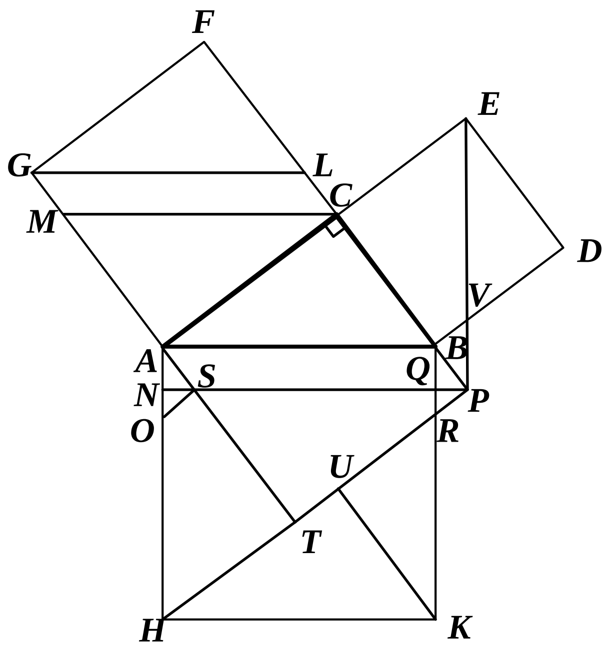
# 勾股定理證明-G052

## 【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 $ABC$ 的 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$ ,正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 以 $\overline{AC}$ 為邊長，向內作正方形 $ACPT$ ，且 $\overline{PT}$ 和 $\overline{BK}$ 相交於 $R$ 點。
3. 過 $G$ 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{CF}$ 交於 $L$ 點。
4. 過 $C$ 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{AG}$ 交於 $M$ 點。
5. 過 $P$ 作 $\overline{AB}$ 的平行線，分別與 $\overline{AH}$，$\overline{AT}$，$\overline{BK}$ 相交於 $N$ 點，$S$ 點，$Q$ 點。
6. 過 $S$ 作 $\overline{AC}$ 的平行線，與 $\overline{AH}$ 交於 $O$ 點。
7. 過 $K$ 作 $\overline{TP}$ 的垂線，與 $\overline{TP}$ 交於 $U$ 點。
8. 連接 $\overline{HT}$，$\overline{PE}$ ，且 $\overline{PE}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 $V$ 點。




## 【求證過程】

以直角三角形 $ABC$ 的三邊分別向外作三個正方形，利用作圖將正方形 $ABKH$ 切割為三個直角三角形與一個四邊形，再利用經過全等形狀的增補與移除關係，分別得到正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 $AHT$ 與三角形 $ABC$ 全等，得到 $H-T-P$ 三點共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AT}=\overline{AC}$ ，且 $\angle HAT=90^{\circ}-\angle TAB=\angle BAC$ ，所以

$$\Delta AHT\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}).$$

可得到 $\angle HTA=\angle BCA=90^{\circ}$，又 $\angle ATP=90^{\circ}$，所以 $\angle HTA+\angle ATP=180^{\circ}$，故

$$H-T-P\text{ 共線。}$$

2. 證明平行四邊形 $MCPS$ 與平行四邊形 $GLBA$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知 $\overline{MC}\,//\,\overline{AB}$, $\overline{MS}\,//\,\overline{CP}$ ，因此四邊形 $MCPS$ 為平行四邊形。

同理，可得到

四邊形 $GLBA$ 為平行四邊形。

且

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}MCPS\text{ 面積}&=\overline{CP}\times\overline{CA}\\&=\overline{GA}\times\overline{CA}\\&=\text{平行四邊形}GLBA\text{ 面積}\end{aligned}$$

3. 證明平行四邊形 $ABPS$ 與平行四邊形 $GLCM$ 的面積相等：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AB}\,//\,\overline{SP}$, $\overline{AS}\,//\,\overline{BP}$ ，因此四邊形 $ABPS$ 為平行四邊形。

同理，可得到

四邊形 $GLCM$ 為平行四邊形，四邊形 $MCBA$ 為平行四邊形。

又因為 平行四邊形$MCPS$ 面積＝平行四邊形$GLBA$ 面積 ，因此

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}ABPS\text{ 面積}&=\text{平行四邊形}MCPS\text{ 面積}-\text{平行四邊形}MCBA\text{ 面積}\\&=\text{平行四邊形}GLBA\text{ 面積}-\text{平行四邊形}MCBA\text{ 面積}\\&=\text{平行四邊形}GLCM\text{ 面積}.\end{aligned}$$

4. 證明三角形 $ASO$ 與三角形 $BPR$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle OAS=\angle RBP$, $\angle AOS=\angle BRP$ ，又因為四邊形 $ABPS$ 為平行四邊形，所以 $\overline{AS}=\overline{BP}$ ，因此

$$\Delta ASO\cong\Delta BPR\,(\text{AAS 全等}).$$

5. 證明三角形 $SPT$ 與三角形 $MCA$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle TSP=\angle AMC$, $\angle SPT=\angle MCA$，又因為四邊形 $MCPS$ 為平行四邊形，所以 $\overline{SP}=\overline{MC}$ ，因此

$$\Delta SPT \cong \Delta MCA \text{(ASA 全等)}.$$

6. 證明三角形 $HUK$ 、三角形 $GFL$ 皆與三角形 $ACB$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle UHK = \angle CAB$, $\angle UKH = \angle CBA$ ，又因為 $\overline{HK} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HUK \cong \Delta ACB \text{(ASA 全等)}.$$

同理， $\Delta GFL \cong \Delta ACB$(ASA 全等).

可得到

$$\Delta HUK \cong \Delta ACB \cong \Delta GFL .$$

7. 證明四邊形 $OSTH$ 與四邊形 $VBCE$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle OHT = \angle VEC$ , $\angle HTS = \angle ECB$, $\angle OST = \angle VBC$ ，且因為

$\Delta AHT \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{HT} = \overline{CB} = \overline{EC}$ . 又因為 $\overline{AS} = \overline{BP}$ ，所以

$\overline{ST} = \overline{AT} - \overline{AS} = \overline{CP} - \overline{BP} = \overline{BC}$ ，因此

$$\text{四邊形}OSTH \cong \text{四邊形}VBCE .$$

8. 證明三角形 $RUK$ 與三角形 $VDE$ 全等：

由作圖的平行關係可知 $\angle UKR = \angle DEV$ , $\angle KUR = \angle EDV = 90°$ ，又因為

$\Delta HUK \cong \Delta ACB$ ，所以 $\overline{UK} = \overline{CB} = \overline{DE}$ ，因此

$$\Delta RUK \cong \Delta VDE \text{ (ASA 全等)}.$$

9. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

正方形 $ABKH$ 面積＝四邊形 $ABRT$ 面積＋$\Delta HUK$ 面積＋$\Delta RUK$ 面積＋$\Delta ASO$ 面積
＋四邊形 $OSTH$ 面積
＝四邊形 $ABRT$ 面積＋$\Delta GFL$ 面積＋$\Delta VDE$ 面積＋$\Delta BPR$ 面積
＋四邊形 $VBCE$ 面積
＝(四邊形 $ABRT$ 面積＋$\Delta BPR$ 面積)＋$\Delta GFL$ 面積＋$\Delta VDE$ 面積
＋四邊形 $VBCE$ 面積
＝(平行四邊形 $ABPS$ 面積＋$\Delta SPT$ 面積)＋$\Delta GFL$ 面積＋$\Delta VDE$ 面積
＋四邊形 $VBCE$ 面積
＝(平行四邊形 $GLCM$ 面積＋$\Delta MCA$ 面積＋$\Delta GFL$ 面積)＋($\Delta VDE$ 面積
＋四邊形 $VBCE$ 面積)
＝正方形 $ACFG$ 面積＋正方形 $BCED$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 ,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯( E.S. Loomis ) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他經過三天的分析思考，在 1890 年 7 月 16 日想出來的。
2. 心得：此題證明所作的輔助線頗多，但繪圖過程皆與平行有關，學生可以比較容易看出對應角之間的相等情形；之後再利用平行四邊形的對邊等長的性質，使學生能夠判斷三角形之間的全等關係。
3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| | | | ● | ● |

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：