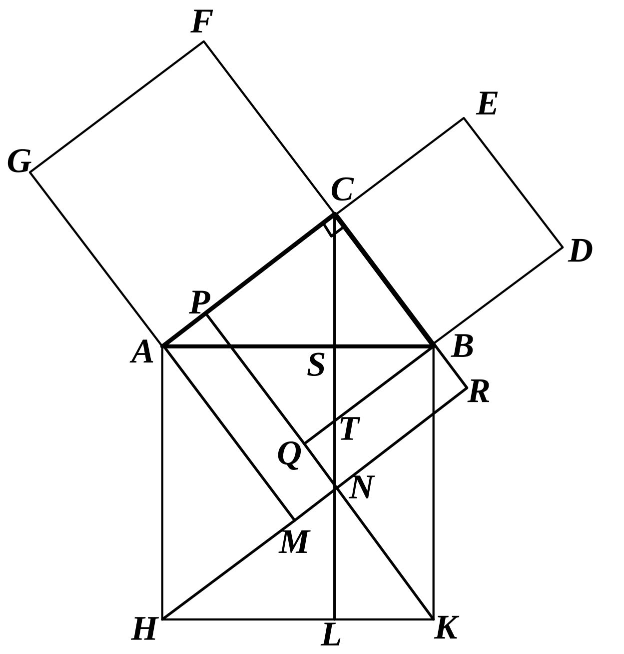
勾股定理證明-G051

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 為邊長，向外作正方形 $ACFG$，正方形 $BCED$ 和正方形 $ABKH$ 。
2. 再分別以 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 為邊長，向內作正方形 $ACRM$ 和正方形 $BCPQ$ 。
3. 連接 $\overline{KQ}$，使其與 $\overline{RM}$ 相交於 N 點。
4. 連接 $\overline{HM}$，$\overline{CN}$，並延長 $\overline{CN}$ 使其與 $\overline{HK}$ 相交於 L 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，利用作圖將正方形 $ABKH$ 切割為兩個長方形，再利用推移得到相同面積的兩個平行四邊形，經過底高線段相等的關係，分別得到正方形 $ACFG$ 與正方形 $BCED$ 的面積，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 AHM 與三角形 ABC 全等，得到 $H-M-R$ 及 $P-Q-K$ 三點共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$，$\angle HAM=\angle BAC$，$\overline{AM}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta AHM \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

因此 $\angle AMH=\angle ACB=90^\circ$，$\angle AMH+\angle AMR=180^\circ$，故

$$H-M-R \text{ 三點共線.}$$

同理

$$P-Q-K \text{ 三點共線.}$$

2. 證明三角形 CNR 與三角形 ABC 全等：

由作圖的平行關係可知四邊形 $BRNQ$ 為長方形，所以 $\overline{RN}=\overline{BQ}=\overline{BC}$. 又 $\overline{AC}=\overline{BR}$,

$\angle ACB=\angle CRN=90°$，因此

$$\Delta CNR\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

3. 先證明三角形 HKN 與三角形 AHM 全等，得到三角形 HKN 與三角形 CNR 全等：

因為 $\angle MAH+\angle AHM=\angle AHM+\angle NHK=90°$，所以 $\angle MAH=\angle NHK$. 又 $\overline{AB}=\overline{HK}$,

$\angle AMH=\angle HNK=90°$，故

$$\Delta HKN\cong\Delta AMH\quad (\text{AAS 全等}).$$

又因為 $\Delta AHM\cong\Delta ABC$, $\Delta CNR\cong\Delta ABC$，可推得

$$\Delta HKN\cong\Delta CNR.$$

4. 證明四邊形 $ASLH$，四邊形 $SBKL$ 皆為長方形：

在 ΔCNR 和 ΔHNL 中，因為 $\Delta HKN\cong\Delta CNR$，所以 $\angle RCN=\angle NHK$. 又 $\angle CNR=\angle HNL$ (對頂角相等)，因此 $\angle NLH=\angle CRN=90°$. 故

四邊形 $ASLH$ 為長方形.

同理

四邊形 $SBKL$ 為長方形.

5. 證明四邊形 $ACNH$ 與四邊形 $CBKN$ 皆為平行四邊形：

由作圖的平行關係可知 $\overline{AC}\,//\,\overline{HN}$, $\overline{AH}\,//\,\overline{CN}$，所以

四邊形 $ACNH$ 為平行四邊形.

同理

四邊形 $CBKN$ 為平行四邊形.

6. 證明長方形 $ASLH$，長方形 $SBKL$ 的面積分別等於平行四邊形 $ACNH$，平行四邊形 $CBKN$ 的面積：

長方形 $ASLH$ 面積＝$\overline{AH}\times\overline{AS}$

＝平行四邊形 $ACNH$ 面積(同底等高).

同理

長方形 $SBKL$ 面積＝$\overline{BK}\times\overline{BS}$

＝平行四邊形 $CBKN$ 面積(同底等高).

7. 證明平行四邊形 $ACNH$，平行四邊形 $CBKN$ 的面積分別等於正方形 $ACRM$，正方形 $CBQP$ 的面積：

平行四邊形 $ACNH$ 面積＝$\overline{AC}\times\overline{AM}$

＝正方形 $ACRM$ 面積(同底等高).

同理

$$\text{平行四邊形}CBKN\text{ 面積}=\overline{CB}\times\overline{BQ}$$
$$=\text{正方形}CBQP\text{ 面積(同底等高)}.$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{ 面積}&=\text{長方形}ASLH\text{ 面積}+\text{長方形}SBKL\text{ 面積}\\&=\text{平行四邊形}ACNH\text{ 面積}+\text{平行四邊形}CBKN\text{ 面積}\\&=\text{正方形}ACRM\text{ 面積}+\text{正方形}CBQP\text{ 面積}\\&=\text{正方形}ACFG\text{ 面積}+\text{正方形}BCED\text{ 面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 24). Leipz.: Friese
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(10), 169.
2. 心得：此題證明的關鍵在於將正方形 *ABKH* 分割成兩個長方形，再將長方形轉移為相同面積的平行四邊形與正方形，最後推得勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	