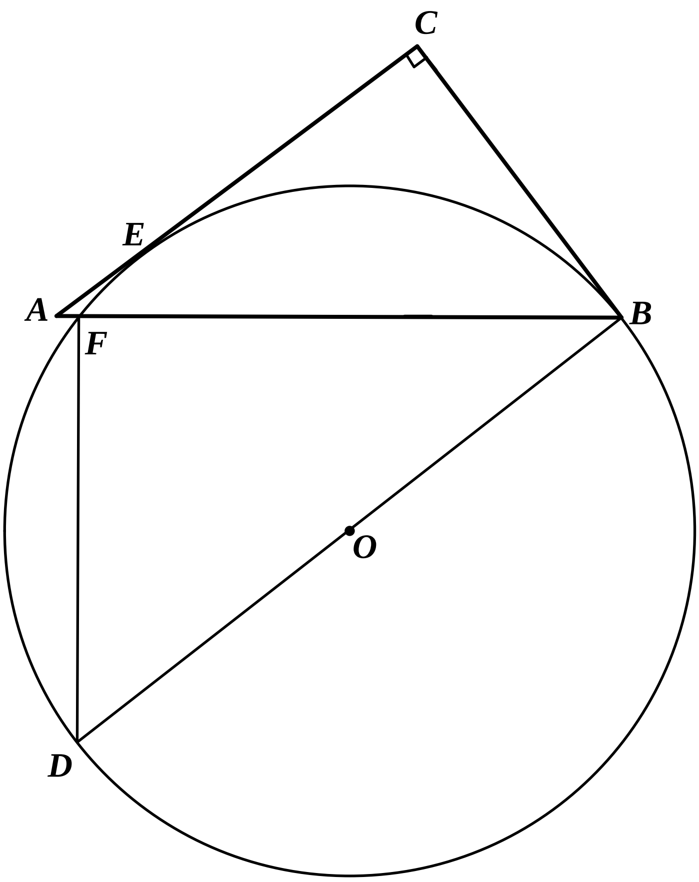
勾股定理證明-A085

【作輔助圖】

1. 過 B 作 $\overline{AC}$ 之平行線，並在線上取 O 點, D 點，使得 $\overline{BO}=\overline{OD}=\overline{BC}$ 。

2. 以 O 為圓心，$\overline{OB}$ 為半徑畫圓，與 $\overline{AC}$ 相切於 E 點，與 $\overline{AB}$ 相交於 F 點。

3. 連接 $\overline{DF}$ 。



【求證過程】

作出一圓與直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 相切後，先證明圖中三角形相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，切線段等長性質以及圓的外冪性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 先證明三角形 ABC 與三角形 BDF 相似：

因為 $\angle BFD$ 為對半圓的圓周角，所以 $\angle BFD = 90° = \angle ACB$ ，且因為 $\overline{AC} // \overline{BD}$,

所以 $\angle FBD = \angle CAB$ (內錯角相等)，故

$$\Delta ABC \sim \Delta BDF \text{ (AA 相似).}$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 BDF 相似可知： $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{BF}$ ，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{BF}=\overline{BD}\times\overline{AC}.$$

即

$$\overline{BF}=\frac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2ab}{c}.$$

3. 利用切線段等長的性質，推出三角形的邊長關係：

因為 $\overline{CE}=\overline{BC}$ (切線段等長)，所以

$$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{CE}=\overline{AE}+\overline{BC},$$
$$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{BC}=b-a.$$

4. 利用圓的外冪性質，推出三角形的邊長關係：

因為 $\overline{AC}$ 與圓 O 相切於 E 點, $\overline{AB}$ 和圓 O 相交於 F 點, B 點，所以由圓的外冪性質可得

$$\begin{aligned}\overline{AE}^2&=\overline{AF}\times\overline{AB}\\&=(\overline{AB}-\overline{BF})\times\overline{AB}.\end{aligned}$$

5. 將第 2 點及第 3 點的等式代入第 4 點的等式化簡整理，推出勾股定理的相關式：

將 $\overline{BF}=\frac{2ab}{c}$, $\overline{AE}=b-a$ ，代入 $\overline{AE}^2=(\overline{AB}-\overline{BF})\times\overline{AB}$ ，可得

$$(b-a)^2=(c-\frac{2ab}{c})\times c,$$

$$b^2-2ab+a^2=c^2-2ab,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *4*(3), 81.
2. 心得：此證明利用三角形的相似性質，切線段等長性質以及圓的外冪性質，來找出一些等式，再將等式整理後，推得勾股定理的關係式，相較於 A084，此證明的過程簡單許多，學生應該比較可以理解。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		